Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2018 – Wiederholungsklausur

> **Hinweis:** Wir verwenden folgende Definitionen:
> - $\mathbb{N}^+$ und $\mathbb{N}_0$ bezeichnen die positiven bzw. nicht-negativen ganzen Zahlen.
> - w^R bezeichnet die Spiegelung eines Wortes w, z.B. $(\mathsf{abb})^R = \mathsf{bba}, \varepsilon^R = \varepsilon$.
> - $\oplus$ ist der XOR-Operator, also $x \oplus y \Leftrightarrow (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$.

AUFGABE 1 (Rechtslineare Grammatik) – 4+2 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $\mathsf{G} = (\{R, S, T, U\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \mathsf{P}, T)$ mit den folgenden Produktionen:

$$R \to \mathsf{a} \mid \mathsf{b} \qquad\qquad S \to \mathsf{a}T \mid \mathsf{a} \qquad\qquad T \to \mathsf{b}R \mid \mathsf{b}S \mid \mathsf{a}U$$

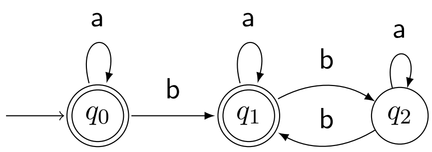
(a) Geben Sie **graphisch** einen NFA N an, sodass $\mathsf{L}(\mathsf{N}) = \mathsf{L}(\mathsf{G})$. Verwenden Sie das entsprechende Verfahren aus der Vorlesung und benennen Sie Ihre Zustände klar.

(b) Geben Sie eine Definition für $\mathsf{L}(\mathsf{G})$ in kompakter Mengenschreibweise an. (**Nicht** als regulären Ausdruck)

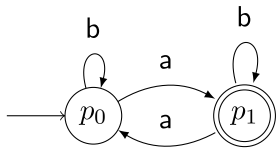
AUFGABE 2 (Produktkonstruktion) – 4+2 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben seien die folgenden zwei DFAs A und B:

A :



B :



(a) Geben Sie **graphisch** einen DFA C an, sodass $\mathsf{L}(\mathsf{C}) = \{w \in \Sigma^* \mid (w \in \mathsf{L}(\mathsf{A})) \oplus (w \in \mathsf{L}(\mathsf{B}))\}$. Verwenden Sie dazu die Produktkonstruktion aus der Vorlesung und benennen Sie Ihre Zustände klar.

(b) Sei D ein DFA mit $\mathsf{L}(\mathsf{D}) = \{w \in \Sigma^* \mid (w \in \mathsf{L}(\mathsf{A})) \circ (w \in \mathsf{L}(\mathsf{B}))\}$. Mit welchem binären Operator muss $\circ$ instantiiert werden, damit für die Menge der Endzustände F_D von D gilt: $\mathsf{F}_\mathsf{D} = \{(q_0, p_1), (q_1, p_1), (q_2, p_0), (q_2, p_1)\}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

AUFGABE 3 (Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen) – 2.5+2.5+3 Punkte

Entscheiden Sie für jede der folgenden Sprachen, ob sie regulär ist. Falls sie regulär ist, geben Sie für jede Myhill-Nerode Äquivalenzklasse den *kürzesten, lexikographisch kleinsten* Repräsentanten an **und** ordnen Sie das Wort bb seiner Äquivalenzklasse zu. Falls die Sprache nicht regulär ist, geben Sie eine Menge von Äquivalenzklassen an **und** beweisen Sie, dass diese Menge unendlich ist.

(a) $\mathsf{L}_1 = \mathsf{L}(\mathsf{b}^*\mathsf{a}^*) \cap \{\mathsf{b}^n\mathsf{a}^n \mid n \in \{1, 2\}\}$

(b) $\mathsf{L}_2 = \mathsf{L}(\mathsf{b}^*\mathsf{a}^*) \cup \{\mathsf{b}^n\mathsf{a}^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

(c) $\mathsf{L}_3 = \mathsf{L}(\mathsf{b}^*\mathsf{a}^*) \setminus \{\mathsf{b}^n\mathsf{a}^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

AUFGABE 4 (Pumping Lemma) – 7 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathsf{L} = \{w\mathsf{c}^n w^R \mid w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^n \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht kontextfrei ist. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis unter Verwendung des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen.

AUFGABE 5 (Kontextfreie Grammatiken) – 4+6 Punkte

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache $\mathsf{L} = \{w\mathsf{c}^n w^R \mid w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^m \wedge n, m \in \mathbb{N}_0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ an. Die Grammatik darf maximal drei Nichtterminale verwenden.
Hinweis: Beachten Sie den Unterschied von L zu Aufgabe 4.

(b) Gegeben sei die Grammatik $\mathsf{G} = (\{S, X, Y\}, \{\Uparrow, \Downarrow, \Rightarrow, \Leftarrow\}, \mathsf{P}, S)$ mit den folgenden Produktionen:

$$S \to XY \qquad X \to \Uparrow\Rightarrow X \Downarrow \qquad X \to \Uparrow\Rightarrow\Downarrow \qquad Y \to \Leftarrow Y \qquad Y \to \Leftarrow$$

Zeigen Sie, dass $\mathsf{L}(\mathsf{G}) = \{(\Uparrow\Rightarrow)^n \Downarrow^n \Leftarrow^m \mid n, m \in \mathbb{N}^+\}$.

Hinweise:
- $\mathsf{G}[\mathsf{Z}]$ bezeichnet die Grammatik G mit Startsymbol Z.
- Zeigen Sie zuerst etwas über $\mathsf{L}(\mathsf{G}[X])$. Verwenden Sie hierbei Induktion über die Länge der Ableitung.
- Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathsf{L}(\mathsf{G}[Y]) = \mathsf{L}(\Leftarrow\Leftarrow^*)$.

AUFGABE 6 (Entscheidbarkeit) – 5+3 Punkte

Betrachten Sie die Menge $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists \mathsf{M}.\, \mathrm{enc}(\mathsf{M}) = w \wedge |\mathsf{L}_H(\mathsf{M})| \leq 42\}$.

(a) Beweisen Sie, dass die Menge nicht semi-entscheidbar ist, indem Sie $\overline{\mathsf{H}_0} \leq A$ zeigen.

(b) Geben Sie einen Semientscheidungsalgorithmus für $\overline{A}$ an.

Hinweis: Verwenden Sie **nicht** den Satz von Rice. Verwenden Sie für diese Aufgabe die folgende Definition des Halteproblems auf dem leeren Band $\mathsf{H}_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists \mathsf{M}.w = \mathrm{enc}(\mathsf{M}) \wedge \mathsf{M}[\varepsilon]\downarrow\}$.

Geben Sie für folgende Quiz Aufgaben an, ob die Aussagen jeweils korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort kurz (z.B. Argumentation mittels Ergebnissen aus der Vorlesung / Übung oder passendem Gegenbeispiel). Zwei Sätze sind als Begründung ausreichend.
Hinweis: $|w|_a$ bezeichnet die Menge der as in w, bspw. ist $|\mathsf{aab}|_\mathsf{a} = 2$.

AUFGABE 7 (Quiz zu regulären und kontextfreien Sprachen) – 5 Punkte

(a) Sei L_1 regulär und L_2 kontextfrei. Dann ist $\mathsf{L}_1 \cap \mathsf{L}_2$ nicht regulär.

(b) Sei L eine Sprache mit $|\mathsf{L}| = |\mathsf{L}^*|$. Dann ist $|\mathsf{L}| = \infty$.

(c) Für jede reguläre Sprache gibt es genau eine Pumping Lemma Zahl.

(d) Jede rechtslineare Grammatik ist nicht mehrdeutig.

(e) Sei A ein DPDA. Dann ist $\overline{\mathsf{L}(A)}$ kontextfrei.

AUFGABE 8 (Quiz Berechenbarkeit) – 5 Punkte

Hinweis: $\mathsf{K} := \{w \mid \exists \mathsf{M}.w = \mathrm{enc}(\mathsf{M}) \wedge \mathsf{M}[w]\downarrow\}$ ist das spezielle Halteproblem.

(a) Die Funktion $f : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}_0$ mit $f(w) = \begin{cases} 11 + |w|_1 & \text{wenn } w \in \mathsf{K} \text{ und } |w|_1 = 314 \\ 325 & \text{sonst} \end{cases}$ ist berechenbar.

(b) Sei f eine berechenbare totale Funktion und M eine TM, die f berechnet. Dann ist $\mathrm{enc}(\mathsf{M}) \in \mathsf{K}$.

(c) Sei A rekursiv aufzählbar und B regulär. Dann ist $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ entscheidbar.

(d) Seien $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ kontextfreie Grammatiken. Es ist semi-entscheidbar, ob $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \cap \mathsf{L}(\mathsf{G}_2) \neq \emptyset$.

(e) Jede berechenbare Funktion kann durch ein WHILE-Programm mit genau einer Schleife berechnet werden.

AUFGABE 9 (Quiz Komplexität) – 5 Punkte

Hinweis: Nehmen Sie im Folgenden an, dass $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

(a) Sei $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathbf{NP}$ und $\mathsf{A} \leq_p \mathsf{B}$. Dann ist B $\mathbf{NP}$-schwer.

(b) Sei A regulär und $\mathsf{B} \leq_p \mathsf{A}$. Dann ist B auch regulär.

(c) Sei $\mathsf{A} \in \overline{\mathbf{NP}}$. Dann ist A nicht semi-entscheidbar.

(d) Sei D ein PDA mit $\mathsf{L}(\mathsf{D})$ inhärent mehrdeutig. Dann ist $\mathsf{L}(\mathsf{D})$ $\mathbf{NP}$-schwer.

(e) Folgendes Problem ist in $\mathbf{P}$:
`INPUT:` Eine natürliche Zahl n.
`OUTPUT:` „Ja“, falls die Formel $\bigwedge_{i=1}^{n}(x_{3i} \vee x_{3i+1} \vee x_{3i+2})$ erfüllbar ist, „Nein“ sonst.