Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2018 – Hausaufgabenblatt 12

Handschriftliche Abgabe

Formale Kriterien zu handschriftlichen Abgaben entnehmen Sie bitte der Website `https://www7.in.tum.de/um/courses/theo/ss2018/homework/`.

AUFGABE 12.1. (*Quiz*) 1 Punkt

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Angenommen $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, dann ist folgende Menge $\mathbf{NP}$-vollständig:

$$\{(G, w) \mid G \text{ ist ein Graph und } w \text{ ein Hamiltonkreis in } G\}$$

(b) $\{A \mid A \text{ ist } \mathsf{TM} \text{ und } \mathsf{L}_H(A) = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^*)\} \in \mathbf{P}$

AUFGABE 12.2. (*Entscheidbarkeit*) 4 Punkte

Geben Sie für jedes der folgenden Probleme an, ob es entscheidbar oder unentscheidbar, semi-entscheidbar oder nicht semi-entscheidbar ist. (Alle zutreffenden Begriffe).

Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen entsprechenden Entscheidungsalgorithmus bzw. eine Reduktion von einem unentscheidbaren/nicht semi-entscheidbaren Problem angeben. Begründen Sie auch die Korrektheit Ihrer Reduktionen. Verwenden Sie nicht den Satz von Rice.

Hinweis: Verwenden Sie für diese Aufgabe die folgende Definition des Halteproblems auf dem leeren Band $\mathsf{H}_0 := \{w \mid \exists \mathsf{M}. w = enc(\mathsf{M}) \wedge \mathsf{M}[\varepsilon] \downarrow\}$

(a) Gegeben eine TM M, entscheide, ob $\left|\varphi_\mathsf{M}(\varepsilon)\right| \geq 314$, wobei φ_M die von M berechnete Funktion ist. In Worten: Bei Eingabe ε ist die Ausgabe der TM M mindestens 314 Symbole lang.

(b) Gegeben eine TM M, entscheide, ob sie für alle Eingaben hält.

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe.

AUFGABE 12.3. (*The Big Picture*) 3 Punkte

In dieser Aufgabe sollen Sie ein Schaubild entwickeln, das die meisten wichtigen Begriffe, die Sie dieses Jahr gelernt haben, in Relation setzt. Es zeigt die Äquivalenz- und Inklusionsbeziehungen zwischen interessanten Mengen von Sprachen. Von links nach rechts gilt Inklusion, von oben nach unten Äquivalenz. Zwei Mengen lassen sich nicht in eine Inklusionskette einfügen, diese sind auf der rechten Seite nach der doppelten Linie extra aufgeführt. Das Schaubild soll folgendes Format haben:

Reg	$\subset$	CFL	$\subset$		$\subseteq$		$\subset$		$\subset$		$\subset$		$\Vert$		$\subset$	Undec
Typ 3	$\mid$	Typ 2	$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\Vert$		$\mid$	
DFA	$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\Vert$		$\mid$	
	$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\Vert$		$\mid$	
	$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\Vert$		$\mid$	
	$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\Vert$		$\mid$	
	$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\Vert$		$\mid$	
	$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\mid$		$\Vert$		$\mid$	
$\{a\}$	$\mid$	$\{a^n b^n\}$	$\mid$		$\mid$		$\mid$	X (*)	$\mid$		$\mid$		$\Vert$		$\mid$	

Fügen Sie die folgenden Begriffe ein. Sie dürfen die angegebenen Abkürzungen verwenden, damit das Schaubild nicht zu groß wird.

- Reguläre Sprachen (Reg) ✓
- Kontextfreie Sprachen (CFL)✓
- Entscheidbare Sprachen (Dec)
- Unentscheidbare Sprachen (Undec) ✓
- Semi-Entscheidbare Sprachen (S-Dec)
- Nicht semi-entscheidbare Sprachen (¬S-Dec)
- Alle formalen Sprachen (All)
- **P**
- **NP**
- Typ-3-Sprachen (Typ 3) ✓
- Typ-2-Sprachen (Typ 2) ✓
- Typ-0-Sprachen (Typ 0)
- $\{\mathsf{L}(G) \mid G$ ist eine rechtslineare Grammatik$\}$ (RLG)
- $\{\mathsf{L}(G) \mid G$ ist eine kontextfreie Grammatik$\}$ (CFG)
- $\{\mathsf{L}(A) \mid A$ ist ein DFA$\}$ (DFA) ✓
- $\{\mathsf{L}(A) \mid A$ ist ein NFA$\}$ (NFA)
- $\{\mathsf{L}(r) \mid r$ ist ein regulärer Ausdruck$\}$ (RegExp)
- $\{\mathsf{L}_\varepsilon(A) \mid A$ ist ein PDA$\}$ (PDA)
- $\{\mathsf{L}_H(\mathsf{M}) \mid \mathsf{M}$ ist eine DTM$\}$ (DTM)
- $\{A \mid A$ wird von einer DTM in polynomieller Zeit entschieden$\}$ (DTM-pol)
- $\{\mathsf{L}_H(\mathsf{M}) \mid \mathsf{M}$ ist eine NTM$\}$ (NTM)
- $\{A \mid A$ wird von einer NTM in polynomieller Zeit entschieden$\}$ (NTM-pol)
- $\{A \mid SAT \leq_p A \wedge A \in \mathbf{NP}\}$ (SAT$\leq$)
- $\{A \mid \chi_A$ ist berechenbar$\}$ (χ_A)
- $\{A \mid \chi'_A$ ist berechenbar$\}$(χ'_A)
- $\{A \mid B$ entscheidbar $\wedge\, B \neq \Sigma^* \wedge B \neq \emptyset \wedge A \leq B\}$ ($\leq$Dec)
- $\{A \mid \mathsf{H}_0 \leq A\}$ ($\mathsf{H}_0 \leq$)
- $\{A \mid \overline{\mathsf{H}_0} \leq A\}$ ($\overline{\mathsf{H}_0} \leq$)
- Rekursiv-Aufzählbare Mengen (RecEn)
- $\{A \mid A$ ist der Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion$\}$ (DefFun)
- $\{A \mid A$ ist der Wertebereich einer WHILE-berechenbaren Funktion$\}$ (WHILE)
- 2^{Σ^*}

Fügen Sie außerdem in der untersten Zeile ein Element aus der Menge von Sprachen ein, sodass es kein Element der vorher genannten Teilmengen ist. (Also z.B. bei CFL eine kontextfreie Sprache, die nicht regulär ist, also z.B. $\{a^n b^n\}$). Nehmen Sie für diese Teilaufgabe an, dass **P**$\neq$**NP**.

(*) Eine Sprache für diese Zelle des Schaubilds war nicht Teil von Theo und folglich müssen Sie keine finden.