Technische Universität München

KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2018 – Übungsblatt 13

Selbstständige Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Tutorgruppen selbstständig vor, indem Sie die Aufgaben 13.1 bis 13.3 ansehen.

AUFGABE 13.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Polynomielle Reduktion $\leq_p$
- SAT
- 3-KNF-SAT

AUFGABE 13.2. (*Quiz*) Stufe B

Diskutieren Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jede Sprache, die von einer NTM in polynomieller Zeit akzeptiert werden kann, existiert eine DTM, die ebenfalls die Sprache in polynomieller Zeit akzeptiert.

(b) A ist $\mathbf{NP}$-schwer $\to A \in \mathbf{P}$.

AUFGABE 13.3. (*Einführung polynomielle Reduktion*) Stufe B

Sie kennen bereits das Problem HAMILTON $:= \{G \mid G$ enthält einen Hamiltonkreis$\}$. Dieses Problem ist **NP**-vollständig.
Zeigen Sie nun, dass das Travelling-Salesman-Problem (TSP) ebenfalls **NP**-vollständig ist.
TSP:

- Eingabe: $n \times n$ Matrix M mit $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
- Frage: Gibt es eine "Rundreise" der Länge $\leq k$.

Eine Rundreise ist eine Permutation π von $[1; n]$, also ein einfacher Kreis, der jede Insel einmal enthält. Die Länge der Rundreise ist die Summe der Kosten der einzelnen Reisen, also $\Sigma_{i=1}^{n} M_{\pi_i,\pi_j}$ (dabei ist π_i der i-te Eintrag der Permutation, beginnend bei 0, und π_j ist der Eintrag für die nächste Insel, also $j = (i+1)\%n$).

AUFGABE 13.4. (*SAT-Varianten*) Stufe C

Wir betrachten eine weitere Variante von SAT, die auch NP-vollständig ist. Zeigen Sie diese NP-Vollständigkeit, indem Sie eine Reduktion 3-KNF-SAT $\leq_p$ 3-OCC-KNF-SAT angeben und 3-OCC-KNF-SAT $\in$ NP zeigen.
3-OCC-KNF-SAT:

- Eingabe: Eine Formel F in KNF, bei der jede Variable höchstens dreimal auftritt.
- Frage: Ist F erfüllbar?

AUFGABE 13.5. (*Wizard of ZOLP*) Stufe D

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem *Zero-One-Linear-Program (ZOLP)* NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3-KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4)$$

Definition (ZOLP-Entscheidungsproblem)

Eingabe: Ein System von linearen Ungleichungen

$$\begin{array}{rcl} b_1 & \leq & a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\ b_2 & \leq & a_{2,1}y_1 + \ldots + a_{2,n}y_n \\ & \vdots & \\ b_m & \leq & a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n \end{array}$$

mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ und $m, n > 0$.
Frage: Gibt es für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Werte aus $\{0, 1\}$, so dass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?

AUFGABE 13.6. (*co-NP*) Stufe E

Wir definieren co-NP über die Komplemente von Sprachen aus NP.

$$\mathsf{co\text{-}NP} = \{\mathsf{L} \mid \overline{\mathsf{L}} \in \mathsf{NP}\}$$

Eine Sprache L heißt co-NP-vollständig, falls $\mathsf{L} \in \mathsf{co\text{-}NP}$ und für jedes $\mathsf{L}' \in \mathsf{co\text{-}NP}$ gilt: $\mathsf{L}' \leq_p \mathsf{L}$.

(a) Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Wenn die Sprache L NP-vollständig ist, so ist $\overline{\mathsf{L}}$ co-NP-vollständig.

(b) Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller boolschen Formeln und $\mathcal{V}$ die Menge aller Variablen. Sei VALID die Menge aller Tautologien:

$$\mathsf{VALID} \coloneqq \{F \in \mathcal{F} \mid \forall \sigma : \mathcal{V} \to \{0,1\}.\ \sigma(F) = 1\}$$

Beweisen Sie, dass VALID co-NP-vollständig ist

(c) Betrachten Sie Definition 6.7 sowie Satz 6.9 der Vorlesung erneut (Zertifikat und polynomiell beschränkter Verifikator). Diskutieren Sie, wie eine analoge Version von Definition 6.7 und Satz 6.9 für co-NP aussehen kann. Beweisen Sie dann Ihre Analogie zu Satz 6.9.