Prof. J. Křetínský
M. Weininger, T. Meggendorfer
Technische Universität München

KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2018 – Übungsblatt 12

Selbstständige Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Tutorgruppen selbstständig vor, indem Sie die Aufgaben 12.1 und 12.2 ansehen.
Sehen Sie sich außerdem die bisherigen Aufgaben zu Reduktion erneut an.
In den Hilfegruppen wird nächste Woche Reduktion und Entscheidbarkeit wiederholt werden.

AUFGABE 12.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- PCP
- Komplexitätsklasse
- **P**
- **NP**
- **NP**-schwer
- **NP**-vollständig

AUFGABE 12.2. (*Quiz*) Stufe B

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Sei die Funktion $f : \Sigma^* \mapsto B$ von einer DTM in polynomieller Zeit berechenbar. Dann gilt $\{(n, f(n))\} \in \mathbf{P}$.

(b) Sei $A \in \mathbf{P}$. Dann gilt für alle DTMs, die A entscheiden, dass sie nur polynomielle Zeit brauchen.

(c) Sei $A \in \mathbf{P}$. Dann existiert ein WHILE-Programm, das A in exponentieller Zeit entscheidet.

(d) Sei A **NP**-vollständig. Dann gilt für alle DTMs die A entscheiden, dass sie mehr als polynomielle Zeit brauchen.

(e) Sei $A \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{NP}$. Dann gibt es ein Java-Programm, das A in konstanter Zeit entscheidet.

AUFGABE 12.3. (*Reduktionen*) Stufe C

Betrachten Sie die folgende Menge:

$$A := \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists \mathsf{M}. w = enc(\mathsf{M}) \wedge \exists x \in \{0,1\}^*. \ \varphi_{\mathsf{M}}(x) = |x|\},$$

wobei φ_{M} die von M berechnete Funktion ist.

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) A ist nicht entscheidbar.

  (i) Geben Sie eine passende Reduktion von H_0 an und begründen Sie deren Korrektheit. Verwenden Sie $\mathsf{H}_0 := \{w \mid \exists \mathsf{M}. w = enc(\mathsf{M}) \wedge \mathsf{M}[\varepsilon]\downarrow\}$.

  (ii) Verwenden Sie den Satz von Rice.

(b) A ist semi-entscheidbar.

(c) $\overline{A}$ ist nicht semi-entscheidbar.

AUFGABE 12.4. (*PCP*) Stufe B - D

Wir betrachten in dieser Aufgabe das Post'sche Korrespondenzproblem (PCP).

(a) Bestimmen Sie *alle* Lösungen für das folgende PCP: $P_1 = ((d, cd), (d, d), (abc, ab))$.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Instanz des PCPs keine Lösung hat: $P_2 = ((ab, aba), (baa, aa), (aba, baa))$.

(c) Zeigen Sie, dass das Post'sche Korrespondenzproblem über einem Alphabet mit nur einem Symbol entscheidbar ist, indem Sie einen Algorithmus angeben. Begründen Sie auch dessen Korrektheit.

(d) Sei $P = (c_1, c_2)$ ein PCP über einem beliebigem Alphabet Σ mit $c_i = (x_i, y_i)$ und $||x_i| - |y_i|| = 1$ für $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie die Entscheidbarkeit für diese Variante des PCPs. Geben Sie hierzu einen Algorithmus an und begründen Sie dessen Korrektheit.

AUFGABE 12.5. (*Entscheidbarkeit und kontextfreie Grammatiken*) Stufe D

Seien $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ CFGs. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \not\subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$ ist semi-entscheidbar.

(b) $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Betrachten Sie den Beweis für die Unentscheidbarkeit von $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \cap \mathsf{L}(\mathsf{G}_2) = \emptyset$ aus der Vorlesung.