Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2018 – Übungsblatt 11

Selbstständige Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Tutorgruppen selbstständig vor, indem Sie die Aufgaben 11.1 bis 11.3 ansehen. Betrachten Sie auch die beiden Beispiel-Kästen, die zeigen, wie man Entscheidbarkeit bzw. Unentscheidbarkeit belegen kann.

AUFGABE 11.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Reduktion
- Satz von Rice

AUFGABE 11.2. (*While → TM*) Stufe B/C

Im Automata Tutor wurde im Rahmen einer Bachelorarbeit der Aufgabentyp "While to TMünd die automatische Erzeugung von Aufgaben dieses Typs implementiert. Hierbei geht es darum, While-Programme zu Turing Maschinen zu konvertieren. Diese Funktionalität soll nun mit Ihrer Hilfe getestet werden.

Laden Sie den Fragebogen von der Vorlesungswebsite herunter und folgen Sie den Anweisungen. Schicken Sie den ausgefüllten Fragebogen bis zum 02.07. an christian.backs@tum.de. Ein Tutorial zur Bedienung der Oberfläche für die Aufgaben finden Sie hier.

AUFGABE 11.3. (*Reduktionen*) Stufe B

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Beweis bzw. ein passendes Gegenbeispiel angeben. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) $\forall A \subseteq \Sigma^*.\ A \leq \Sigma^*$

(b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^*.\ A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$

(c) $\forall A \subseteq \Sigma^*.\ A \neq \emptyset \wedge A \neq \Sigma^* \implies A \leq \overline{A}$

(d) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^*.\ A \leq B \wedge B \leq C \implies A \leq C$

AUFGABE 11.4. Stufe B

Sei $\mathsf{H}_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathsf{M}_w[\varepsilon]\downarrow\}$ und sei $A := \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in \mathbb{N}_0.\ |w| = 5i + 3\}$ mit $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Erklären Sie, warum die angegebenen Funktionen keine Reduktionen gemäß Vorlesungsdefinition sind.

(a) Behauptung: $\mathsf{H}_0 \leq A$
Reduktion:

$$f(w) = \begin{cases} \mathsf{aaa} & \text{falls } w \in \mathsf{H}_0 \\ \mathsf{b} & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Behauptung: $A \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes Element $x \in \Sigma^*$ auf die Kodierung einer TM M_x, die wie folgt definiert ist: Die TM M_x löscht die Eingabe und schreibt x aufs Band, bestimmt dann die Länge von x, zieht 3 ab und prüft anschließend, ob das Ergebnis durch 5 teilbar ist. Dementsprechend gibt die Maschine "Ja" (1) und "Nein" (0) aus.

(c) Behauptung: $\overline{\mathsf{H}_0} \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ simuliert. Falls M_w hält, geht $\mathsf{M}_{f(w)}$ in eine Endlosschleife. Falls $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ nicht hält, hält $\mathsf{M}_{f(w)}$.

(d) Behauptung: $H_{\Sigma^*} \leq \mathsf{H}_0$ mit $H_{\Sigma^*} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ \mathsf{M}_w[x]\downarrow\}$.
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die erst die Eingabe löscht und nicht deterministisch $x \in \Sigma^*$ erzeugt und dann $\mathsf{M}_w[x]$ simuliert.

AUFGABE 11.5. (*Entscheidbarkeit*) Stufe C

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die angegebenen Probleme entscheidbar bzw. semi-entscheidbar sind. Dazu sollen Sie jeweils eine Turing-Maschine beschreiben, die das Problem löst.

Beispiel:

Es ist entscheidbar, ob eine deterministische Turing-Maschine für irgendeine Eingabe mehr als 314 Schritte macht.

Wir führen die Turing-Maschine nacheinander auf allen Wörtern $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq 315$ für höchstens 315

Schritte aus. Wenn wir 315 Schritte simuliert haben, halten wir und geben "ja" aus, ansonsten halten wir, sobald wir die Turing-Maschine auf allen Wörtern w wie oben angegeben simuliert haben, und geben "nein" aus.

Korrektheit des Algorithmus: Es gibt nur endlich viele Wörter bis Länge maximal 315. Wir begründen zunächst durch einen Widerspruchsbeweis, dass es genügt, alle Wörter bis Länge 315 zu betrachten. Angenommen, wir entscheiden uns falsch, d.h. es gibt eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ mit $|w| > 315$, auf die die Turing-Maschine mindestens 315 Schritte macht, aber für alle w' mit $|w'| \leq 315$ macht sie maximal 314 Schritte. Betrachte v mit $|v| = 315$ und es gibt v', so dass $vv' = w$. Die Turing-Maschine hält für v nach maximal 314 Schritten. Da sie in 314 Schritten maximal 314 Felder lesen kann, kann sie nicht die gesamte Eingabe v lesen. Da die Turing-Maschine deterministisch ist, wird sie alles nach 314 Feldern ignorieren und so insbesondere v und w gleich behandeln. Widerspruch.

(a) Es ist entscheidbar, ob eine Turing-Maschine mehr als 314 Zustände hat.
(b) Es ist entscheidbar, ob eine Turing-Maschine bei Eingabe ε mehr als 314 Schritte macht.
(c) Es ist entscheidbar, ob eine Turing-Maschine auf Eingabe ε ihren Kopf mehr als 314 Felder von der Startposition entfernen kann.

AUFGABE 11.6. (*Reduktionen und Unentscheidbarkeit*) Stufe C

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass das angegebene Problem unentscheidbar ist, indem Sie eine passende Reduktion von einem unentscheidbares Problem angeben.

Beispiel:

Es ist unentscheidbar, ob eine Turing-Maschine für alle Eingaben 0 *ausgibt.* Formal heißt dies, dass wir zeigen wollen, dass $V_0 := \{\mathsf{enc}(\mathsf{M}) \mid \forall \mathsf{x} \in \Sigma^*.\ \varphi_{\mathsf{enc}(\mathsf{M})}(\mathsf{x}) = 0\}$ unentscheidbar ist. Wir tun dies, indem wir das Komplement des speziellen Halteproblems auf V_0 reduzieren, wobei das Halteproblem so definiert ist: $\mathsf{K} := \{w \mid \exists \mathsf{M}.\mathsf{M} = enc(w) \wedge \mathsf{M}\ w] \downarrow\}$. *enc* ist dabei eine Funktion, die ein Encoding einer TM auf die entsprechende TM abbildet. Gegeben ein Wort, das keine TM encodiert, ist *enc* undefiniert.

Reduktion von $\overline{\mathsf{K}}$*:* Wir konstruieren für ein gegebenes Encoding $\mathsf{enc}(\mathsf{M})$ eine Turing-Maschine M' mit Eingabe $\mathsf{x} \in \{0,1\}^*$ wie folgt: Wir simulieren die Turing-Maschine M auf $\mathsf{enc}(\mathsf{M})$ für $|\mathsf{x}|$ viele Schritte. Falls M nicht innerhalb von $|\mathsf{x}|$ vielen Schritten hält, dann geben wir 0 aus, ansonsten 1.

Die Reduktion ist berechenbar, weil wir das Encoding von Turing-Maschinen berechnen können und Turing-Maschinen anhand ihres Encodings für eine begrenzte Anzahl an Schritten simulieren können.

Die Reduktion ist korrekt, weil... Angenommen, $\mathsf{enc}(\mathsf{M}) \in \overline{\mathsf{K}}$. Dann hält die Simulation der Turing-Maschine M auf Eingabe $\mathsf{enc}(\mathsf{M})$ während der Ausführung der Turing-Maschine M' für keine Eingabe x. Das heißt, die Turing-Maschine M' gibt immer 0 aus.

Angenommen, $\mathsf{enc}(\mathsf{M}) \in \mathsf{K}$. Dann gibt es eine natürliche Zahl t, so dass die Simulation von M in t Schritten auf $\mathsf{enc}(\mathsf{M})$ hält. Dann gibt die Turing-Maschine M' den Wert 1 für alle Eingaben der Länge größer oder gleich t aus.

Damit ist die folgende Funktion eine Reduktion von $\overline{\mathsf{K}}$ auf V_o: Sei $y \in V_0$.

$$i \mapsto \begin{cases} \mathsf{enc}(\mathsf{M}') & \text{falls } i = \mathsf{enc}(\mathsf{M}) \text{ für eine Turing-Maschine M} \\ y & \text{ansonsten} \end{cases}$$

Der Fall falls i kein Encoding einer TM ist, ist wichtig, damit die Funktion total ist. Da K nur TMs enthält, sind alle Worte, die keine TM encodieren in $\overline{\mathsf{K}}$, und müssen folglich auf ein Element von V_0 abgebildet werden.

Zeigen Sie: Es ist unentscheidbar zu prüfen, ob für zwei als Eingabe gegebene Turing-Maschinen die eine auf allen Eingaben genau dann hält, wenn die andere nicht hält.
Zeigen Sie auch, dass dieses Problem nicht semi-entscheidbar ist.

AUFGABE 11.7. (*Satz von Rice*)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen unentscheidbar für $\Sigma = \{0,1\}$ sind, und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist. Stufe C

(a) $\mathsf{L}_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}\}$
(b) $\mathsf{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0.\ \varphi_w(n) = n * (n - 23) + 42\}$
(c) $\mathsf{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0.\ (|w| > p \wedge p \text{ ist prim}) \rightarrow w_p = 0\}$

Hinweis: $w_p \in \Sigma$ bezeichnet den Buchstaben an der p-ten Stelle im Wort w.

AUFGABE 11.8. (*Semi-Entscheidbarkeit*)

Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie die folgende Behauptung: Stufe D

$$A \text{ ist semi-entscheidbar gdw. } A \text{ ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion}$$