Prof. J. Křetínský
M. Weininger, T. Meggendorfer

Technische Universität München

KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2018 – Übungsblatt 4

AUFGABE 4.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Wortproblem
- Leerheitsproblem
- Endlichkeitsproblem
- Äquivalenzproblem
- Minimierung
- Pumping Lemma
- Strukturelle Induktion

AUFGABE 4.2. (*Probleme*) Stufe B

Wie können Sie für einen

(a) DFA (b) NFA (c) Regulären Ausdruck

feststellen, ob die von ihm akzeptierte Sprache

(1) endlich ist? (2) leer ist? (3) ein Wort w enthält?

(d) Wie können Sie für zwei DFAs feststellen, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren?

AUFGABE 4.3. (*Verständnis*) Stufe B

Geben Sie jeweils eine formale Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ mit folgenden Eigenschaften an:

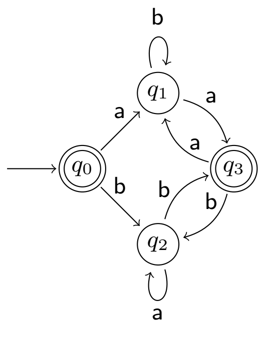
(a) endlich (b) unendlich und regulär (c) nicht regulär und kontextfrei

Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie Sie bei der Konstruktion der Sprachen vorgegangen sind, um sicher zu stellen, dass die Sprache die gewünschte Eigenschaft hat.

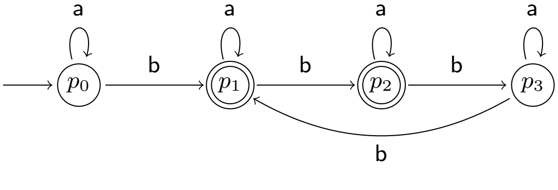
AUFGABE 4.4. (*Minimierung*) B/C

Minimieren Sie die folgenden DFAs.

(a) DFA D_1:



(b) DFA D_2:



AUFGABE 4.5. (*Rekursive Prozeduren und strukturelle Induktion*) C/D

(a) Definieren Sie eine rekursive Prozedur $\mathit{iszero}\colon \mathsf{RE} \mapsto \mathbb{B}$ sodass für alle Ausdrücke r gilt:

$$\mathit{iszero}(\mathsf{r}) \Leftrightarrow \mathsf{L}(\mathsf{r}) = \emptyset$$

(b) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Prozedur mit struktureller Induktion.

(c) Definieren Sie eine rekursive Prozedur $\mathit{isfinite}\colon \mathsf{RE} \mapsto \mathbb{B}$ sodass für alle Ausdrücke r gilt:

$$\mathit{isfinite}(\mathsf{r}) \Leftrightarrow |\mathsf{L}(\mathsf{r})| < \infty$$

Sie dürfen dabei sowohl *iszero* verwenden als auch die Prozedur *isepsilon*, mit der Semantik $\mathit{isepsilon}(\mathsf{r}) \Leftrightarrow \mathsf{L}(\mathsf{r}) = \{\varepsilon\}$

(d) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Prozedur mit struktureller Induktion.

AUFGABE 4.6. (*Pumping Lemma*) C

Beweisen Sie für jede der folgenden Sprachen mithilfe des Pumping Lemmas, dass sie *nicht* regulär sind.

(a) $\mathsf{L}_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$

(b) $\mathsf{L}_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geq |w|_1\}$

(c) $\mathsf{L}_3 = \{\varepsilon, \mathsf{a}, \mathsf{a}^{n \cdot m} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m > 1, n > 1\}$

(d) $\mathsf{L}_4 = \{\mathsf{a}^{6i}\mathsf{b}^{6i} \mid i \geq 0\}$

(e) $\mathsf{L}_5 = \{\mathsf{a}^{2^i} \mid i \geq 0\}$

AUFGABE 4.7. (*Umkehrung(Spiegelung)*) D

Ziel dieser Aufgabe ist es Algorithmen anzugeben, die es erlauben, die Umkehrung einer Sprache zu berechnen, d.h. für jede reguläre Sprache L die Sprache L^R anzugeben, so dass $\mathsf{L}^R := \{w^R \mid w \in \mathsf{L}\}$.

(a) Sei D ein DFA. Geben Sie einen Algorithmus an, der den DFA D in einen ε-NFA N übersetzt, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{D})^R = \mathsf{L}(\mathsf{N})$. Beweisen Sie auch die Korrektheit Ihres Verfahrens.

(b) Konstruieren Sie für den regulären Ausdruck $\mathsf{r} = 0 \mid 1(0|1)^*0$ einen DFA und wenden Sie Ihr Spiegelungsverfahren aus Aufgabenteil (a) an.

(c) Geben Sie einen regulären Ausdruck r' mit $\mathsf{L}(\mathsf{r}) = \mathsf{L}(\mathsf{r}')^R$ an.

(d) Geben Sie nun ein Verfahren an, welches rekursiv einen regulären Ausdruck r in einen regulären Ausdruck r' umschreibt, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{r})^R = \mathsf{L}(\mathsf{r}')$ gilt. Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens mittels struktureller Induktion und seien Sie besonders ausführlich in den Fällen Konkatenation, Vereinigung und Stern.

AUFGABE 4.8. (*Homomorphismen auf regulären Sprachen*) E

Sei Σ ein Alphabet und $\mathsf{L} \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Weiter sei $h\colon \Sigma \to \Sigma^*$ eine Abbildung, die jedem Zeichen $\mathsf{x} \in \Sigma$ ein Wort $h(\mathsf{x}) \in \Sigma^*$ zuordnet. h erweitert man kanonisch auf Σ^* mittels $h(\varepsilon) = \varepsilon$ und $h(\mathsf{x}w) = h(\mathsf{x})h(w)$ für alle $\mathsf{x} \in \Sigma, w \in \Sigma^*$. Schließlich sei $h(\mathsf{L}) = \{h(w) \mid w \in \mathsf{L}\}$.

(a) Zeigen Sie: Ist L regulär, dann ist auch $h(\mathsf{L})$ regulär.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung des Resultats aus Aufgabenteil (a), dass $\mathsf{L}' = \{\mathsf{a}\mathsf{b}^{3i}\mathsf{c}\mathsf{d}^{2i}\mathsf{e} \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ nicht regulär ist.