Prof. J. Křetínský — Technische Universität München
M. Weininger, T. Meggendorfer

KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2018 – Übungsblatt 3

AUFGABE 3.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- regulärer Ausdruck
- ε-NFA
- Produktkonstruktion
- rekursive Prozedur

AUFGABE 3.2. (*Automata Tutor*)

Automate Tutor bietet jetzt die Möglichkeit, gewisse Aufgaben zu Grammatiken zu generieren. Klicken Sie dazu auf “exercise”, wählen Sie das Problem “Words in grammar”, eine Schwierigkeit und eine Qualität. Stufe B

AUFGABE 3.3. Stufe B

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen regulären Ausdruck an, der genau die Sprache beschreibt. Verwenden Sie für die ersten drei Aufgaben das Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ und für die letzten beiden $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) Wörter gerader Länge.
(b) Wörter, die mit einem a beginnen und enden, sowie Wörter, die mit einem b beginnen und enden.
(c) Wörter, in denen kein a neben einem b steht.
(d) Zahlen in Binärdarstellung (most-significant-bit-first), die durch 2 teilbar sind.
(e) Zahlen in Binärdarstellung (most-significant-bit-first), die nicht durch 4 teilbar sind.

AUFGABE 3.4. Stufe B

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Geben Sie einen regulären Ausdruck mit möglichst wenigen Zeichen für die Sprache an, in der alle Wörter gleich oft die Zeichenketten ab und ba enthalten.
Beispiel: Das Wort abab enthält zweimal ab, aber nur einmal ba und soll somit *kein* Element der Sprache sein.

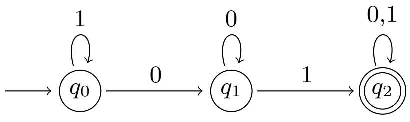
AUFGABE 3.5. Stufe C

(a) Geben Sie für jeden Teilausdruck des regulären Ausdrucks $((\mathsf{a}\emptyset)^*\mathsf{b} \mid \mathsf{ab})^*$ einen ε-NFA an. Verwenden Sie hierbei das Verfahren aus der Vorlesung ohne Abänderung, d.h. Sie sollen weder die regulären Ausdrücke noch die Automaten, die Sie konstruieren, vereinfachen.
Hinweis: Es gibt 9 Teilausdrücke. Der Ausdruck selbst ist auch ein Teilausdruck.
(b) Überführen Sie den ε-NFA für den gesamten Ausdruck aus Teilaufgabe a) in einen DFA. Kombinieren Sie hierzu die Potenzmengenkonstruktion mit der Idee des Beweises von Lemma 3.17.

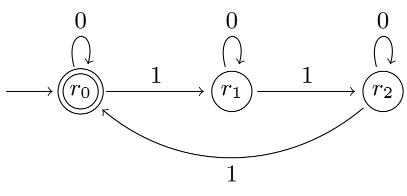
AUFGABE 3.6. Stufe C

Gegeben seien zwei DFAs D_1 und D_2 über dem gleichen Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

D_1 :



D_2 :



(a) Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung um einen DFA $\mathsf{D}_\cap$ anzugeben, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{D}_\cap) = \mathsf{L}(\mathsf{D}_1) \cap \mathsf{L}(\mathsf{D}_2)$.
(b) Geben Sie einen DFA $\mathsf{D}_\cup$ an, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{D}_\cup) = \mathsf{L}(\mathsf{D}_1) \cup \mathsf{L}(\mathsf{D}_2)$. Sie dürfen Ergebnisse aus Teilaufgabe a) verwenden.
(c) Was müssen Sie ändern, um einen DFA für $\mathsf{L}(\mathsf{D}_1) \setminus \mathsf{L}(\mathsf{D}_2)$ anzugeben? Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse für allgemeine binäre Operationen auf Sprachen.

Definition (Suffix-Sprache)

Sei $\mathsf{L} \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über dem Alphabet Σ. Wir definieren $\mathsf{L}_{\mathsf{sf}} := \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*.\ uv \in \mathsf{L}\}$ und bezeichnen L_{sf} als *die Sprache der Suffixe* von L.

AUFGABE 3.7. Stufe D

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$. Wir zeigen nun, dass wenn L regulär ist, dann ist auch L_{sf} regulär.

(a) Geben Sie die Sprache der Suffixe für $\mathsf{L} = \{\mathsf{abc}, \mathsf{d}\}$ an.
(b) Sei L regulär. Beweisen Sie, dass auch $\mathsf{L_{sf}}$ regulär ist, indem Sie aus einem NFA $\mathsf{N} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, \mathsf{q}_0, \mathsf{F})$ mit $\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{N})$ einen ε-NFA N' mit $\mathsf{L_{sf}} = \mathsf{L}(\mathsf{N}')$ angeben.
(c) Geben Sie direkt, d.h. ohne den Umweg über NFAs einen regulären Ausdruck r mit $\mathsf{L}(r) = \mathsf{L}((\mathsf{ab} \mid \mathsf{b})^*\mathsf{cd})_{\mathsf{sf}}$ an.
(d) Beschreiben Sie eine rekursive Prozedur, die einen gegebenen regulären Ausdruck r direkt in einen regulären Ausdruck r' mit $\mathsf{L}(r') = \mathsf{L}(r)_{\mathsf{sf}}$ umschreibt.

AUFGABE 3.8.

Stufe D

Sei Σ ein endliches Alphabet. Ein *sternfreier* Ausdruck ist wie folgt definiert:

- *Syntax:* Die Grammatik mit folgender Produktion gibt die Menge aller gültigen sternfreien Ausdrücke an:

$$\mathsf{S} \to \boldsymbol{\emptyset} \mid \boldsymbol{\varepsilon} \mid x \mid \mathsf{SS} \mid \overline{\mathsf{S}} \mid \mathsf{S}|\mathsf{S} \qquad\qquad x \in \Sigma$$

  Wir bezeichnen mit $|$ Vereinigung, mit SS Konkatenation und mit $\overline{\mathsf{S}}$ Komplement.

- *Semantik*

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{\emptyset}) := \emptyset \quad \mathsf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) := \{\varepsilon\} \quad \mathsf{L}(\mathsf{a}) := \{\mathsf{a}\} \quad \mathsf{L}(\alpha\beta) := \mathsf{L}(\alpha)\mathsf{L}(\beta) \quad \mathsf{L}(\overline{\alpha}) := \Sigma^* \setminus \mathsf{L}(\alpha) \quad \mathsf{L}(\alpha|\beta) := \mathsf{L}(\alpha) \cup \mathsf{L}(\beta)$$

(a) Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass $\mathsf{L}(\alpha)$ eine reguläre Sprache über Σ ist, falls α ein sternfreier Ausdruck über Σ ist. Passen Sie hierfür den Beweis aus den Folien, dass jeder reguläre Ausdruck sich in einen NFA übersetzen lässt, entsprechend an.
Hinweise:
  - Die Umkehrung von (a) gilt nicht, z.B. ist $\mathsf{L}((\mathsf{aa})^*)$ eine reguläre Sprache über $\Sigma = \{\mathsf{a}\}$, welche sich nicht durch einen sternfreien Ausdruck beschreiben lässt.
  - Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage verwenden: Ist $\mathsf{D} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, \mathsf{q}_0, \mathsf{F})$ ein DFA, so akzeptiert der DFA $\mathsf{D}' = (\mathsf{Q}', \Sigma', \delta', \mathsf{q}_0', \mathsf{F}')$, wobei $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}'$, $\Sigma = \Sigma'$, $\mathsf{q}_0 = \mathsf{q}_0'$, $\delta = \delta'$ und $\mathsf{F}' = \mathsf{Q} \setminus \mathsf{F}$ gerade die Sprache $\mathsf{L}(\mathsf{D}') = \Sigma^* \setminus \mathsf{L}(\mathsf{D})$.
  - (a) impliziert, dass es für jeden sternfreien Ausdruck α einen regulären Ausdruck α' mit $\mathsf{L}(\alpha) = \mathsf{L}(\alpha')$ gibt.

(b) Beweisen Sie die Behauptung $\mathsf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}|\overline{\overline{\mathsf{a}\overline{\boldsymbol{\emptyset}}}|\overline{\overline{\boldsymbol{\emptyset}}\mathsf{b}}|\overline{\boldsymbol{\emptyset}}\mathsf{aa}\overline{\boldsymbol{\emptyset}}|\overline{\boldsymbol{\emptyset}}\mathsf{bb}\overline{\boldsymbol{\emptyset}}}) = \mathsf{L}\big((\mathsf{ab})^*\big)$ für $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, indem Sie
  (i) zuerst den sternfreien Ausdruck in einen ε-NFA übersetzen,
  (ii) den ε-NFA gemäß der Vorlesung über Zwischenschritte in einen regulären Ausdruck übertragen und
  (iii) schließlich den erhaltenen regulären Ausdruck mittels der Äquivalenzen aus der Vorlesung zu $(\mathsf{ab})^*$ vereinfachen.

Hinweis: Vereinfachen Sie den NFA zunächst vor der Übersetzung in einen regulären Ausdruck, indem Sie alle Zustände, die keinen Endzustand erreichen können, entfernen. Erklären Sie kurz, warum sich die erkannte Sprache dadurch nicht ändert.

AUFGABE 3.9.

Stufe E

Wir betrachten das duale Modell zu NFAs und definieren für diese Aufgabe *UFA*s (universelle endliche Automaten), die ein Wort w akzeptieren gdw. alle Läufe auf w in einem Endzustand enden. Sei $\mathsf{U} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, \mathsf{q}_0, \mathsf{F})$ ein UFA. Dann wird das Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann akzeptiert, wenn $\delta(\mathsf{q}_0, w) \subseteq \mathsf{F}$.
(a) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage gilt und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen passenden Beweis oder ein passendes Gegenbeispiel angeben:

Jeder UFA ohne Endzustände akzeptiert die leere Sprache.

(b) Wir betrachten folgende Sprache $\mathsf{L}_k = \{w \in \Sigma^* \mid \forall 1 \le i \le |w| \,.\, w_i = \mathsf{a} \to w_{i+k} = \mathsf{b}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Konstruieren Sie einen NFA und einen UFA für $k = 2$ und $k = 3$. Vergleichen Sie Ihre beiden Lösung bezüglich der Größe der Automaten.
(c) Geben Sie eine Übersetzung von UFAs zu DFAs an und beweisen Sie deren Korrektheit.