Prof. J. Křetínský
M. Weininger, T. Meggendorfer **KEINE ABGABE** Technische Universität München

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2018 – Übungsblatt 1

AUFGABE 1.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Alphabet Σ
- Wort w
- Länge eines Wortes
- leeres Wort
- Konkatenation von Wörtern
- Σ^*
- formale Sprache
- Operationen auf Sprachen (Def. 2.3)
- Grammatik
- reflexive transitive Hülle
- rechtslineare Grammatik
- kontextfreie Grammatik
- kontextsensitive Grammatik
- Grammatiken vom Typ-0
- reguläre Sprache
- kontextfreie Sprache
- kontextsensitive Sprache
- Sprachen vom Typ-0
- Wortproblem

AUFGABE 1.2. (*Automata Tutor*) Stufe B

AutomataTutor ist ein online Übungstool, mit dem Studierende die Grundlagen der Automatentheorie erlernen können. Es bietet die Möglichkeit, viele der für die Vorlesung relevanten Probleme selbständig zu üben.
In dieser Aufgabe geht es darum, dass Sie das Übungstool AutomataTutor kennenlernen.

- Rufen Sie die AutomataTutor Version der TUM auf. (Vorlesungswebseite -> Vorlesungsunterlagen -> AutomataTutor oder dieser Link)
- Registrieren Sie sich. (Bestätigungsmail beachten!)
- Lösen Sie die gestellten Aufgaben unter "Practice Problem Sets".

AUFGABE 1.3. Stufe B

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und $\mathsf{W} = \{\mathsf{aa}, \mathsf{aaa}, \mathsf{b}\}$. Geben Sie, wenn möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

(a) $A = \{w \mid w \in W^2 \wedge w \in W^3\}$
(b) $B = \{w \in W^* \mid |w| = 3\}$
(c) $C = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \exists v \in W. w = uv\}$
(d) $D = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. uw = w^2u\}$
(e) $E = \{(\mathsf{ba}^n\mathsf{b})^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
(f) $F = \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0.\ |w|_\mathsf{a} = n \cdot |w|_\mathsf{b}\}$

Hinweise:

- Mit $|w|_\mathsf{a}$ bezeichnen wir die Anzahl der as in w.

AUFGABE 1.4. Stufe B

Gegeben seien folgende drei Grammatiken $\mathsf{G}_1 = (\{\mathsf{S}, \mathsf{X}\}, \Sigma, \mathsf{P}_1, \mathsf{S})$, $\mathsf{G}_2 = (\{\mathsf{S}, \mathsf{X}\}, \Sigma, \mathsf{P}_2, \mathsf{S})$ und $\mathsf{G}_3 = (\{\mathsf{S}, \mathsf{S}', \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}, \Sigma, \mathsf{P}_3, \mathsf{S})$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ mit folgende Produktionen:

$$
\begin{array}{llllll}
\mathsf{P}_1: & \mathsf{S} \to \mathsf{aX} & \mathsf{X} \to \mathsf{bS} \mid \mathsf{b} & & & \\
\mathsf{P}_2: & \mathsf{S} \to \mathsf{aSb} \mid \mathsf{SX} \mid \varepsilon & \mathsf{X} \to \mathsf{cX} & & & \\
\mathsf{P}_3: & \mathsf{S} \to \mathsf{S}' \mid \varepsilon & \mathsf{S}' \to \mathsf{ABC} \mid \mathsf{ABCS}' & & & \\
& \mathsf{A} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{B} \to \mathsf{b} & \mathsf{C} \to \mathsf{c} & \mathsf{CB} \to \mathsf{BC} & \mathsf{CA} \to \mathsf{AC} & \mathsf{BA} \to \mathsf{AB}
\end{array}
$$

Begründen Sie, warum die folgenden Wörter von den gegebenen Grammatiken erzeugt bzw. nicht erzeugt werden.

(a) $w_1 = \mathsf{abab} \in \mathsf{L}(\mathsf{G}_1)$, $w_2 = \mathsf{ba} \notin \mathsf{L}(\mathsf{G}_1)$, $w_3 = \varepsilon \notin \mathsf{L}(\mathsf{G}_1)$
(b) $u_1 = \mathsf{aabb} \in \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$, $u_2 = \mathsf{aabbcc} \notin \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$
(c) $v_1 = \mathsf{aabbcc} \in \mathsf{L}(\mathsf{G}_3)$, $v_2 = \mathsf{aaabbc} \notin \mathsf{L}(\mathsf{G}_3)$

AUFGABE 1.5. Stufe B

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, $\mathsf{A} = \{\varepsilon, \mathsf{a}, \mathsf{ab}\}$ und $\mathsf{B} = \{\mathsf{a}, \mathsf{ba}\}$. Wir betrachten nun verschiedene Verknüpfungen. Geben Sie für endliche Mengen alle Elemente und für unendliche drei Beispiele an:

(a) AB
(b) A^2
(c) B^0
(d) $\mathsf{A}\emptyset$
(e) $\mathsf{A} \times (\emptyset^*)$
(f) $\mathsf{A} \triangle \mathsf{B} := (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \setminus (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$
(g) $\overline{B} := \Sigma^* \setminus B$

AUFGABE 1.6.

Stufe C / D

Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen eine passende Grammatik G, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{G})$ genau die Sprache ist.

(a) $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \mod 2 = 0\}$
(b) $B = \{w \in \{0,1\}^+ \mid w \mod 2 = 0\}$, wobei w eine Binärzahl mit most-significant-bit-first Encoding darstellt
(c) $C = \{ww^R \mid w \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}^*\}$
(d) $D = \{ww \mid w \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}^*\}$
(e) $E = \{\mathsf{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

Hinweise:

- Wir bezeichnen mit w^R die Spiegelung von w, d.h. $(\mathsf{abb})^R = \mathsf{bba}, \varepsilon^R = \varepsilon$.
- Eine mögliche Lösung von Aufgabenteil (d) erweitert die Grammatik von Aufgabenteil (c) passend.
- Für Aufgabe (e) ist `https://math.stackexchange.com/questions/136237/` hilfreich.
- *Achtung*: Aufgabenteile (d) und (e) sind deutlich anspruchsvoller. Es macht daher nichts, wenn Sie die Aufgaben erst in ein paar Wochen lösen können!

AUFGABE 1.7.

Stufe D

Sei Σ ein Alphabet und $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C} \subseteq \Sigma^*$ beliebig. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie für korrekte Aussagen einen Beweis an oder widerlegen Sie falsche mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels.

(a) $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^+$ gdw. $\varepsilon \in \mathsf{A}$
(b) $\mathsf{A}(\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = \mathsf{AB} \cap \mathsf{AC}$
(c) Falls $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{B}$, dann $\mathsf{A}^n \subseteq \mathsf{B}^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.
(d) Unter der Annahme $\mathsf{A} \neq \emptyset$ gilt: $\mathsf{A} = \mathsf{AA}$ gdw. $\mathsf{A} = \mathsf{A}^*$.

AUFGABE 1.8.

Stufe D

Sei $\mathsf{L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\mathsf{a}} = 2\,|w|_{\mathsf{b}}\}$ und seien folgende drei Grammatiken gegeben:

(a) $\mathsf{S} \to \varepsilon \mid \mathsf{SS} \mid \mathsf{aab} \mid \mathsf{aba} \mid \mathsf{baa}$
(b) $\mathsf{S} \to \varepsilon \mid \mathsf{SS} \mid \mathsf{aSaSb} \mid \mathsf{aSbSa} \mid \mathsf{bSaSa}$
(c) $\mathsf{S} \to \varepsilon \mid \mathsf{SaX} \mid \mathsf{XaS} \qquad \mathsf{X} \to \mathsf{SaSbS} \mid \mathsf{SbSaS} \mid \mathsf{XX}$

Entscheiden Sie, ob für die jeweils angegebenen Grammatiken $\mathsf{L}(\mathsf{G}) = \mathsf{L}$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder ein Gegenbeispiel angeben oder die Äquivalenz mit vollständiger Induktion beweisen.

AUFGABE 1.9.

Stufe E

Eine Sprache $\mathsf{L} \subseteq \Sigma^*$ heißt *linear*, falls es eine kontextfreie Grammatik G gibt, so dass auf der rechten Seite einer jeden Produktion höchstens ein Nichtterminal steht (d.h. $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{V} \times (\Sigma^*\mathsf{V}\Sigma^* \cup \Sigma^*)$). Die folgende Aussage gilt:

Ist L linear mit $\varepsilon \notin \mathsf{L}$, dann gibt es eine CFG G, so dass $\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{G})$ und für jede Produktion $\mathsf{X} \to \gamma$ gilt: $\gamma \in \Sigma\mathsf{V} \cup \mathsf{V}\Sigma \cup \Sigma$.

(a) Vergewissern Sie sich zunächst, dass die Aussage korrekt ist, indem Sie die Grammatik G in eine Form bringen, so dass für jede Produktion $\mathsf{X} \to \gamma$ die Bedingung $\gamma \in \Sigma\mathsf{V} \cup \mathsf{V}\Sigma \cup \Sigma$ gilt.

$$\mathsf{S} \to \mathsf{cSc} \mid \mathsf{aaXbb} \qquad \mathsf{X} \to \mathsf{c} \mid \mathsf{S}$$

(b) Beweisen Sie nun die obige Aussage.