# Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2017 – Abgabeblatt 3

**Abgabeblatt**

Wir unterscheiden zwischen Übungs- und Abgabeblättern. Mit diesem *Abgabeblatt* fragen wir eine *Auswahl* an Kernaspekten ab, die auf den Trainingsblättern 10 bis 12 zu finden sind. Auch die Kernaspekte, die sich nicht auf Abgabeblättern finden, sind für die Klausur relevant. Wenn Sie die Abgabeblätter regelmäßig abgeben, können Sie zusätzlich einen *Bonus* von 0,3 (nach Bestehen) für beide Klausuren erreichen. Die genauen Regularien, wann Sie einen Notenbonus erhalten und wann nicht, finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

**AUFGABE 3.1.** (*Restless-TMs*) 3 Punkte

Wir bezeichnen eine TM $\mathsf{M} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, \mathsf{q}_0, \square, \mathsf{F})$ als Restless-TM falls $\delta \colon \mathsf{Q} \times \Gamma \to \mathsf{Q} \times \Gamma \times \{L, R\}$. Somit bewegt eine Restless-TM in jedem Schritt ihren Kopf und kann nicht an der gleichen Bandposition verweilen. Geben Sie eine allgemeine Übersetzung von einer TM $\mathsf{M} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, \mathsf{q}_0, \square, \mathsf{F})$ zu einer Restless-TM $\mathsf{M}' = (\mathsf{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta', \mathsf{q}_0, \square, \mathsf{F})$ an, so dass $\mathsf{L}_F(\mathsf{M}) = \mathsf{L}_F(\mathsf{M}')$ gilt.

- Definieren Sie nur die neue Transitionsfunktion $\delta'$. Alle anderen Komponenten der TM M sollen unverändert übernommen werden.
- Stellen sie sicher, dass falls die TM M nur die Kopfbewegungen $\{N, R\}$ verwendet, M′ nur $R$ verwendet.

**AUFGABE 3.2.** (*Reguläre Sprachen und Turing Maschinen*) 6 Punkte

Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen speziellen Turing Maschinen und regulären Sprachen.

(a) Sei M eine Restless-TM (siehe Aufgabe 3.1), die ihren Kopf nicht nach links bewegen kann. Konstruieren Sie einen $\varepsilon$-NFA N mit $\mathsf{L}_F(\mathsf{M}) = \mathsf{L}(\mathsf{N})$.
(b) Sei D ein DFA. Konstruieren Sie eine TM M mit $\mathsf{L}(\mathsf{D}) = \mathsf{L}_F(\mathsf{M})$.

Geben Sie für beide Konstruktionen die Definitionen der Zustände und der Transitionen an, sowie eine Begründung für die Korrektheit, indem Sie die Läufe auf den FAs mit den Berechnungen der TMs vergleichen.

**AUFGABE 3.3.** (*Collatz-Vermutung*) 4 Punkte

Zu einem Startwert $a_0 \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt:

$$a_{n+1} \coloneqq \begin{cases} a_n/2 & a_n \text{ gerade} \\ 3a_n + 1 & a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die seit 1937 unbewiesene Collatz-Vermutung besagt:

Für alle positiven Startwerte $a_0 \in \mathbb{N}$ gibt es einen Index $i \in \mathbb{N}_0$, so dass $a_i = 1$.

Nehmen Sie an, es gibt ein Programm N, welches als Eingabe ein WHILE-Programm P mit genau einer Eingabevariable nimmt und zu jedem solchen P angibt, ob P die Nullfunktion berechnet. *Zeigen Sie, dass Sie dann die Collatz-Vermutung beweisen oder widerlegen können.*

**Hinweise:**

- Geben Sie auch das WHILE-Programm P, das sie für Ihren Beweis verwendet haben, an.
- Sie dürfen jede Syntax, die in den Folien für WHILE-Programme eingeführt worden ist, verwenden.

**AUFGABE 3.4.** (*Reduktionen*) 6 Punkte

Betrachten Sie die folgende Menge:

$$A \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists x \in \{0,1\}^*.\ \varphi_w(x) = |x|\}$$

Zeigen Sie die nun folgenden Behauptungen:

(a) $A$ ist nicht entscheidbar.
(b) $A$ ist semi-entscheidbar.
(c) $\overline{A}$ ist nicht semi-entscheidbar.

**Hinweise:**

- (a): Geben Sie eine passende Reduktion an und verwenden Sie nicht den Satz von Rice.
- (b): Beschreiben Sie eine passende Turing-Maschine.

**AUFGABE 3.5.** (*Polynomielle Reduktionen*) 6 Punkte

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller aussagenlogischen Formeln über eine unendliche Menge $\mathcal{V}$ von Variablen. Betrachten Sie folgende Definitionen:

- Sei $\sigma\colon \mathcal{V} \to \{0,1\}$ eine Belegung. Wir bezeichnen mit $\overline{\sigma}$ die Negation von $\sigma$ und definieren $\overline{\sigma}(x) \coloneqq 1 - \sigma(x)$.
- Eine Belegung $\sigma\colon \mathcal{V} \to \{0,1\}$ wird konsistent mit der Semantik der Aussagenlogik auf $\mathcal{F} \to \{0,1\}$ erweitert.
- Mit $\mathsf{UNSAT}$ bezeichnen wir das Problem, gegeben eine aussagenlogische Formel $F$ zu entscheiden, ob $F$ *nicht* erfüllbar ist. Formal:
$$\mathsf{UNSAT} \coloneqq \{F \in \mathcal{F} \mid \forall \sigma\colon \mathcal{V} \to \{0,1\}.\ \sigma(F) = 0\}$$
- Mit $\mathsf{SYM}$ bezeichnen wir das Problem, gegeben eine aussagenlogische Formel $F$ zu entscheiden, ob $F$ symmetrisch ist, d.h. für alle Belegungen $\sigma$ gilt: $\sigma(F) = \overline{\sigma}(F)$. Formal:
$$\mathsf{SYM} \coloneqq \{F \in \mathcal{F} \mid \forall \sigma\colon \mathcal{V} \to \{0,1\}.\ \sigma(F) = \overline{\sigma}(F)\}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen, in dem Sie geeignete Reduktionen angeben. Zeigen Sie auch die Korrektheit der Reduktionen und begründen Sie, warum die Reduktionen in polynomieller Zeit liegen.

(a) $\mathsf{UNSAT} \leq_p \mathsf{SYM}$

(b) $\mathsf{SYM} \leq_p \mathsf{UNSAT}$