Prof. J. Esparza
S. Sickert, J. Krämer

Technische Universität München
ABGABE Montag, 29. Mai 2017, 10 Uhr, **25 Punkte**

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2017 – Abgabeblatt 1

Abgabeblatt

Wir unterscheiden zwischen Übungs- und Abgabeblättern. Mit diesem *Abgabeblatt* fragen wir eine *Auswahl* an Kernaspekten ab, die auf den Trainingsblättern 1 bis 4 zu finden sind. Auch die Kernaspekte, die sich nicht auf Abgabeblättern finden, sind für die Klausur relevant. Wenn Sie die Abgabeblätter regelmäßig abgeben, können Sie zusätzlich einen *Bonus* von 0,3 (nach Bestehen) für beide Klausuren erreichen. Die genauen Regularien, wann Sie einen Notenbonus erhalten und wann nicht, finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

AUFGABE 1.1. (*Übersetzungen*) 8 Punkte

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und $\mathsf{L} \coloneqq \{w \mid \big(w_1 = \mathsf{a} \land \forall 3 \leq i \leq |w| \,.\, w_i = \mathsf{a}\big) \lor \big(w_1 = w_2 = \mathsf{a} \land \forall 3 \leq i \leq |w| \,.\, w_i = \mathsf{b}\big)\}$.

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck r an, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{r}) = \mathsf{L}$.
(b) Geben Sie einen ε-NFA N gemäß Vorlesung an, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{r}) = \mathsf{L}(\mathsf{N})$.
(c) Geben Sie einen DFA D mithilfe der Potenzmengenkonstruktion an, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{D}) = \mathsf{L}(\mathsf{N})$.
(d) Geben Sie eine rechtlineare Grammatik G gemäß Vorlesung an, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{G}) = \mathsf{L}(\mathsf{D})$.

Hinweise:

- Sie bekommen für eine Teilaufgabe nur dann Punkte, wenn Ihr Automat, Ihr Ausdruck bzw. Ihre Grammatik die folgenden Wörter korrekt erkennt:
  – *nicht* enthalten: ε, abab, aaaab
  – enthalten: a, aa, aaaa
- Sie dürfen von den in der Vorlesung beschriebenen Konstruktionsverfahren abweichen, *sofern* Sie diese Änderungen genau dokumentieren und deren Korrektheit begründen.

AUFGABE 1.2. (*Abschlusseigenschaften*) 5 Punkte

Sei Σ ein Alphabet und $\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2 \subseteq \Sigma^*$. Wir definieren:

$$\texttt{REPEAT}(\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2) \coloneqq \{w^{(1)} \dots w^{(n)} \mid n \in \mathbb{N} \land \big(\forall 0 < i < n.\ (w^{(i)} \in \mathsf{L}_1 \land w^{(i)} \notin \mathsf{L}_2)\big) \land w^{(n)} \in \mathsf{L}_2\}$$

Die Sprache $\texttt{REPEAT}(\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2)$ enthält alle Wörter, die *solange* Wörter aus der Sprache L_1 konkateniert bis ein Wort aus der Sprache L_2 auftritt. Beweisen Sie die folgende Aussage

Wenn L_1 und L_2 regulär sind, dann ist auch $\texttt{REPEAT}(\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2)$ regulär.

Definition

Sei Σ ein endliches Alphabet und $\mathsf{X} \subseteq 2^\Sigma$.

- Sei $w \in \Sigma^*$. Wir definieren $\ell(w) \coloneqq \{\mathsf{x} \mid |w|_\mathsf{x} > 0\}$. $\ell(w)$ ist die Menge aller im Wort w auftretenden Buchstaben.
- Wir definieren die Sprache $\mathsf{L}_\mathsf{X} \coloneqq \{w \in \Sigma^* \mid \ell(w) \in \mathsf{X}\}$.

Beispiele:

- $\Sigma^* = \mathsf{L}_{2^\Sigma}$
- Die Sprache aus Aufgabe 2.4 von Übungsblatt 2 über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ lässt sich aufschreiben als L_X mit $\mathsf{X} = \{\emptyset, \{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{b}\}, \{\mathsf{c}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{c}\}, \{\mathsf{b}, \mathsf{c}\}\}$.

AUFGABE 1.3. (*Regularität*)

Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie, dass L_X für alle $\mathsf{X} \subseteq 2^\Sigma$ regulär ist, indem Sie eine passende Konstruktion für einen DFA D in Abhängigkeit von X angeben und beweisen, dass $\mathsf{L}(\mathsf{D}) = \mathsf{L}_\mathsf{X}$ 5 Punkte

AUFGABE 1.4. (*Pumping Lemma*)

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Zeigen Sie mithilfe des Pumping Lemmas, dass $\mathsf{L} \coloneqq \{w \in \Sigma^* \mid |w|_\mathsf{a} - 2 \cdot |w|_\mathsf{b} = 0\}$ nicht regulär ist. 3 Punkte

AUFGABE 1.5. (*Entscheidungsverfahren*) 4 Punkte

Zeigen Sie mithilfe des passenden Entscheidungsalgorithmus aus der Vorlesung, dass die beiden regulären Ausdrücke $(1|10)^*$ und $1^*(101^*)^*$ die gleiche Sprache akzeptieren.

Hinweis: Sie dürfen von den in der Vorlesung beschriebenen Konstruktionsverfahren abweichen, *sofern* Sie diese Änderungen genau dokumentieren und deren Korrektheit begründen.