Prof. J. Esparza
S. Sickert, J. Krämer

Technische Universität München
KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2017 – Übungsblatt 12

Übungsblatt

Wir unterscheiden zwischen Übungs- und Abgabeblättern. Auf diesem *Übungsblatt* finden Sie eine Übersicht über die Kernaspekte, die Sie in Kalenderwoche 29 in den Tutorien diskutieren, üben und vertiefen. Die Aufgaben auf diesem Blatt dienen dem Üben und Verstehen des Vorlesungsstoffes, sowie dem *eigenständigen Erarbeiten* der Kernaspekte. Außerdem sollen Ihnen diese Aufgaben auch helfen, ein Gefühl dafür zu bekommen, was Sie inhaltlich in der Klausur erwartet. Klausuraufgaben können jedoch deutlich von den hier gestellten Aufgaben abweichen. Abschreiben und Auswendiglernen von Lösungen wird Ihnen daher keinen dauerhaften Erfolg in der Vorlesung bringen. Fragen zu den Übungsblättern können Sie montags bis donnerstags von 12 Uhr bis 14 Uhr in der *THEO-Sprechstunde* in Raum 03.11.034 stellen.

Kernaspekte

K12.1 korrektes Wiedergeben der folgenden Definitionen und Algorithmen

- PCP

K12.2 mithilfe des Satzes von Rice zeigen, dass eine Sprache unentscheidbar ist
K12.3 berechnen von Lösungen für PCP-Instanzen
K12.4 beweisen, dass PCP-Instanzen keine Lösung besitzen
K12.5 Aussagen über Reduktionen beweisen oder widerlegen
K12.6 Fehler in inkorrekten Reduktionen erkennen
K12.7 begründet entscheiden, ob gegebene Beispiele neu eingeführte Definitionen erfüllen
K12.8 Aussagen mit neu eingeführten Definitionen beweisen oder widerlegen

AUFGABE 12.1. Stufe B

Sei $\mathsf{H}_0 \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathsf{M}_w[\varepsilon]\downarrow\}$ und sei $A \coloneqq \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in \mathbb{N}_0.\ |w| = 5i + 3\}$ mit $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Erklären Sie, warum die angegebenen Funktionen keine Reduktionen gemäß Vorlesungsdefinition sind.

(a) Behauptung: $\mathsf{H}_0 \leq A$
Reduktion:

$$f(w) = \begin{cases} \mathsf{aaa} & \text{falls } w \in \mathsf{H}_0 \\ \mathsf{b} & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Behauptung: $A \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes Element $x \in \Sigma^*$ auf die Kodierung einer TM M_x, die wie folgt definiert ist: Die TM M_x löscht die Eingabe und schreibt x aufs Band, bestimmt dann die Länge von x, zieht 3 ab und prüft anschließend, ob das Ergebnis durch 5 teilbar ist. Dementsprechend gibt die Maschine "Ja" (1) und "Nein" (0) aus.

(c) Behauptung: $\overline{\mathsf{H}_0} \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ simuliert. Falls M_w hält, geht $\mathsf{M}_{f(w)}$ in eine Endlosschleife. Falls $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ nicht hält, hält $\mathsf{M}_{f(w)}$.

(d) Behauptung: $H_{\Sigma^*} \leq \mathsf{H}_0$ mit $H_{\Sigma^*} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ \mathsf{M}_w[x]\downarrow\}$.
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die erst die Eingabe löscht und nicht deterministisch $x \in \Sigma^*$ erzeugt und dann $\mathsf{M}_w[x]$ simuliert.

AUFGABE 12.2. (*Reduktionen*) Stufe C

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Beweis bzw. ein passendes Gegenbeispiel angeben. Sei $\Sigma = \{0,1\}$.

(a) $\forall A \subseteq \Sigma^*.\ A \leq \Sigma^*$
(b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^*.\ A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$
(c) $\forall A \subseteq \Sigma^*.\ A \neq \emptyset \wedge A \neq \Sigma^* \implies A \leq \overline{A}$
(d) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^*.\ A \leq B \wedge B \leq C \implies A \leq C$

AUFGABE 12.3. (*PCP*) Stufe B - D

Wir betrachten in dieser Aufgabe das Post'sche Korrespondenzproblem (PCP).

(a) Bestimmen Sie *alle* Lösungen für das folgende PCP: $P_1 = ((d, cd), (d, d), (abc, ab))$.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Instanz des PCPs keine Lösung hat: $P_2 = ((ab, aba), (baa, aa), (aba, baa))$.

(c) Zeigen Sie, dass das Post'sche Korrespondenzproblem über einem Alphabet mit nur einem Symbol entscheidbar ist, indem Sie einen Algorithmus angeben. Begründen Sie auch dessen Korrektheit.

(d) Sei $P = (c_1, c_2)$ ein PCP über einem beliebigem Alphabet Σ mit $c_i = (x_i, y_i)$ und $||x_i| - |y_i|| = 1$ für $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie die Entscheidbarkeit für diese Variante des PCPs. Geben Sie hierzu einen Algorithmus an und begründen Sie dessen Korrektheit.

AUFGABE 12.4. Stufe C

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen unentscheidbar für $\Sigma = \{0, 1\}$ sind, und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist.

- $\mathsf{L}_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}\}$
- $\mathsf{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0.\ \varphi_w(n) = n * (n - 23) + 42\}$
- $\mathsf{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0.\ (|w| > p \land p \text{ ist prim}) \rightarrow w_p = 0\}$

Hinweis: $w_p \in \Sigma$ bezeichnet den Buchstaben an der p-ten Stelle im Wort w.

AUFGABE 12.5. (*Semi-Entscheidbarkeit*) Stufe D

Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie die folgende Behauptung:

$$A \text{ ist semi-entscheidbar gdw. } A \text{ ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion}$$

AUFGABE 12.6. (*Entscheidbarkeit und kontextfreie Grammatiken*) Stufe D

Seien $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ CFGs. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \not\subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$ ist semi-entscheidbar.

(b) $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$ ist unentscheidbar.

Hinweis: In der Vorlesung wurde das Resultat nur erwähnt, zeigen Sie das Resultat jetzt formal. Sie dürfen verwenden, dass für CFGs $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ das Problem $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \cap \mathsf{L}(\mathsf{G}_2) = \emptyset$ unentscheidbar ist. Schauen Sie sich den entsprechenden Beweis in den Folien an. Charakterisieren Sie die dort verwendeten CFGs möglichst genau nach linear, rechtslinear, linkslinear und deterministisch. Denken Sie außerdem daran, dass $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G}_2) \Leftrightarrow \mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \cap \overline{\mathsf{L}(\mathsf{G}_2)} = \emptyset$.