

Einführung in die theoretische Informatik
Sommersemester 2017 – Übungsblatt 7

Übungsblatt

Wir unterscheiden zwischen Übungs- und Abgabebältern. Auf diesem *Übungsblatt* finden Sie eine Übersicht über die Kernaspekte, die Sie in Kalenderwoche 24 in den Tutorien diskutieren, üben und vertiefen. Die Aufgaben auf diesem Blatt dienen dem Üben und Verstehen des Vorlesungsstoffes, sowie dem *eigenständigen Erarbeiten* der Kernaspekte. Außerdem sollen Ihnen diese Aufgaben auch helfen, ein Gefühl dafür zu bekommen, was Sie inhaltlich in der Klausur erwartet. Klausuraufgaben können jedoch deutlich von den hier gestellten Aufgaben abweichen. Abschreiben und Auswendiglernen von Lösungen wird Ihnen daher keinen dauerhaften Erfolg in der Vorlesung bringen. Fragen zu den Übungsblättern können Sie montags bis donnerstags von 12 Uhr bis 14 Uhr in der *THEO-Sprechstunde* in Raum 03.11.034 stellen.

Kernaspekte

K7.1 korrektes Wiedergeben der folgenden Definitionen

- Chomsky-Normalform
- Greibach-Normalform
- mehrdeutig
- inhärent mehrdeutig

K7.2 für eine gegebene Grammatik Chomsky-Normalform angeben

K7.3 mit dem Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen beweisen, dass eine Sprache nicht kontextfrei ist

K7.4 Aussagen über mehrdeutige Grammatiken und inhärent mehrdeutige Sprachen beweisen bzw. widerlegen

K7.5 begründet entscheiden, ob gegebene Beispiele neu eingeführte Definitionen erfüllen

K7.6 Aussagen, mit neu eingeführten Definitionen beweisen oder widerlegen

AUFGABE 7.1.

Betrachten Sie die folgende Grammatik G:

Stufe B

S → N-P V-P
N-P → C-N | C-N P-P
V-P → C-V | C-V P-P
P-P → P C-N
C-N → A N
C-V → V | V N-P
A → a | the
N → girl | boy | flower
V → touches | likes | sees
P → with

(a) Zeigen Sie, dass die Grammatik mehrdeutig ist, indem Sie zwei verschiedene Ableitungen für das folgende Wort angeben:

a girl touches a boy with a flower

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache $L(G)$ endlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass es keine endliche Sprache gibt, die inhärent mehrdeutig ist.

(d) Für Programmiersprachen sind mehrdeutige Grammatiken unerwünscht, da jedes Programm nur eine einzige, eindeutige Bedeutung haben soll. Diskutieren Sie anhand den verschiedenen Bedeutungsmöglichkeiten des in Aufgabenteil (a) angegebenen Satzes, warum man natürliche Sprache nur mit mehrdeutigen Grammatiken sinnvoll repräsentieren kann.

AUFGABE 7.2.

Zeigen Sie, dass es keine reguläre Sprache gibt, die inhärent mehrdeutig ist.

AUFGABE 7.3.

Die CFG G bestehe aus folgenden Produktionen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

Stufe B

Stufe C

S → ASA | aB
A → B | S | CB
B → b | ε
C → aC
D → aSCb | a

- (a) Beschreiben Sie in eigenen Worten, wann ein Nichtterminal *nützlich* in einer Grammatik ist.
- (b) Reduzieren Sie die Grammatik G auf die nützlichen Nichtterminale.
- (c) Überführen Sie die reduzierte Grammatik dann in Chomsky-Normalform.
- (d) Erklären Sie in eigenen Worten, wie Sie nach Überführen einer Grammatik in CNF überprüfen können, dass Sie keine Fehler gemacht haben.¹

AUFGABE 7.4. (*Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen*)

Stufe C

Wir betrachten Pfeil-Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow\}$. Wir interpretieren dabei ein Wort $w \in \Sigma^*$ als einen Pfad in einem 2D-Gitter.

- (a) Geben Sie eine formale Definition für die folgenden beiden Sprachen an:²
 - (i) Pfade, die „umkehren“ — beliebig weit nach rechts fahren, dann noch weiter entweder nach oben oder unten gehen und letztlich wieder umkehren und noch weiter nach links fahren. Diese Pfade enden dann links vom Ursprung.
 - (ii) Pfade, die in den Ursprung zurückkehren.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass diese Sprache nicht kontextfrei sind

AUFGABE 7.5.

Stufe D-E

- (a) Erklären Sie, was man unter einer Familie von Grammatiken versteht und geben Sie ein eigenes Beispiel dazu an.
- (b) Zeigen Sie, dass jede Grammatik G der Größe $\mathcal{O}(n)$, wenn man sie in CNF **entsprechend den Folien** übersetzt maximal nur quadratisch größer ($\mathcal{O}(n^2)$) werden kann.
- (c) Zeigen Sie, dass es eine Familie von Grammatiken G_n der Größe $\mathcal{O}(n)$ gibt, die die folgende Behauptung erfüllt: *Überführt man G_n in CNF, indem man die Schritte der Folien umordnet nach (3), (4), (1), (2), dann ist die erzeugte Grammatik G'_n ebenfalls in CNF, jedoch exponentiell größer als G .*

AUFGABE 7.6.

Stufe E

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. L ist *präfix-abgeschlossen*, wenn für alle $w \in L$ und $v \in \Sigma^*$ mit $v \triangleleft w$ gilt: $v \in L$. *Beweisen Sie, dass jede unendliche, präfix-abgeschlossene, kontextfreie Sprache eine unendliche, reguläre Teilmenge enthält.*

AUFGABE 7.7. (*Richtig, richtig schwer...*)

Stufe E

Wir definieren die Rotation einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ als $R(L) := \{yx \mid xy \in L\}$. *Beweisen Sie, dass kontextfreie Sprache unter Rotation abgeschlossen sind.*

¹Hier geht es nicht um einen formalen Beweis, dass die beiden Sprachen gleich sind, sondern um eine Strategie, wie Sie bei Aufgaben wie im vorherigen Aufgabenteil Fehler vermeiden.

²Wenn Ihnen nicht direkt eine formale Definition einfällt, gehen Sie wie wir auf Blatt 6 vor, d.h. machen Sie Beispiele von Wörtern, die in der Sprache enthalten bzw. nicht enthalten sind.