Prof. J. Esparza
S. Sickert, J. Krämer

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2017 – Übungsblatt Lösungsskizze 7

Übungsblatt

Wir unterscheiden zwischen Übungs- und Abgabeblättern. Auf diesem *Übungsblatt* finden Sie eine Übersicht über die Kernaspekte, die Sie in Kalenderwoche 24 in den Tutorien diskutieren, üben und vertiefen. Die Aufgaben auf diesem Blatt dienen dem Üben und Verstehen des Vorlesungsstoffes, sowie dem *eigenständigen Erarbeiten* der Kernaspekte. Außerdem sollen Ihnen diese Aufgaben auch helfen, ein Gefühl dafür zu bekommen, was Sie inhaltlich in der Klausur erwartet. Klausuraufgaben können jedoch deutlich von den hier gestellten Aufgaben abweichen. Abschreiben und Auswendiglernen von Lösungen wird Ihnen daher keinen dauerhaften Erfolg in der Vorlesung bringen. Fragen zu den Übungsblättern können Sie montags bis donnerstags von 12 Uhr bis 14 Uhr in der *THEO-Sprechstunde* in Raum 03.11.034 stellen.

Kernaspekte

K7.1 korrektes Wiedergeben der folgenden Definitionen

- Chomsky-Normalform
- Greibach-Normalform
- mehrdeutig
- inhärent mehrdeutig

K7.2 für eine gegebene Grammatik Chomsky-Normalform angeben
K7.3 mit dem Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen beweisen, dass eine Sprache nicht kontextfrei ist
K7.4 Aussagen über mehrdeutige Grammatiken und inhärent mehrdeutige Sprachen beweisen bzw. widerlegen
K7.5 begründet entscheiden, ob gegebene Beispiele neu eingeführte Definitionen erfüllen
K7.6 Aussagen, mit neu eingeführten Definitionen beweisen oder widerlegen

AUFGABE 7.1.

Stufe B

Betrachten Sie die folgende Grammatik G:

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{S} & \to & \text{N-P V-P} \\
\text{N-P} & \to & \text{C-N} \mid \text{C-N P-P} \\
\text{V-P} & \to & \text{C-V} \mid \text{C-V P-P} \\
\text{P-P} & \to & \text{P C-N} \\
\text{C-N} & \to & \text{A N} \\
\text{C-V} & \to & \text{V} \mid \text{V N-P} \\
\text{A} & \to & \texttt{a} \mid \texttt{the} \\
\text{N} & \to & \texttt{girl} \mid \texttt{boy} \mid \texttt{flower} \\
\text{V} & \to & \texttt{touches} \mid \texttt{likes} \mid \texttt{sees} \\
\text{P} & \to & \texttt{with}
\end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Grammatik mehrdeutig ist, indem Sie zwei verschiedene Ableitungen für das folgende Wort angeben:

`a girl touches a boy with a flower`

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathsf{L}(\mathsf{G})$ endlich ist.
(c) Zeigen Sie, dass es keine endliche Sprache gibt, die inhärent mehrdeutig ist.
(d) Für Programmiersprachen sind mehrdeutige Grammatiken unerwünscht, da jedes Programm nur eine einzige, eindeutige Bedeutung haben soll. Diskutieren Sie anhand den verschiedenen Bedeutungsmöglichkeiten des in Aufgabenteil (a) angegebenen Satzes, warum man natürliche Sprache nur mit mehrdeutigen Grammatiken sinnvoll repräsentieren kann.

Lösungsskizze

(a) (i) $\mathsf{S} \to$ N-P V-P $\to$ C-N V-P $\to$ A N V-P $\to^*$ a girl V-P $\to$ a girl C-V P-P $\to$ a girl C-V P C-N $\to$ a girl C-V with C-N $\to$ a girl C-V with A N $\to^*$ a girl C-V with a flower $\to$ a girl V N-P with a flower $\to$ a girl touches N-P with a flower $\to$ a girl touches C-N with a flower $\to$ a girl touches A N with a flower $\to^*$ a girl touches a boy with a flower

(ii) $\mathsf{S} \to$ N-P V-P $\to$ C-N V-P $\to$ A N V-P $\to^*$ a girl V-P $\to$ a girl C-V $\to$ a girl V N-P $\to$ a girl touches N-P $\to$ a girl touches C-N P-P $\to$ a girl touches A N P-P $\to^*$ a girl touches a boy P-P $\to$ a girl touches a boy P C-N $\to$ a girl touches a boy P A N $\to^*$ a girl touches a boy with a flower

(b) Der Graph (V, E), wobei die Knotenmenge V gerade die Menge aller Nicht-Terminale ist und $E := \{(V, V') \mid \exists V \to wV'w'\}$, ist azyklisch.

(c) Sei L eine endliche Sprache, d.h. $|\mathsf{L}| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Grammatik $\mathsf{G} = (\{\mathsf{S}\}, \Sigma, \{\mathsf{S} \to w \mid w \in \mathsf{L}\}, \mathsf{S})$ erkennt dann genau L. Jedes Wort aus L hat somit eine eindeutige Ableitung und die Grammatik ist somit nicht inhärent mehrdeutig.

(d) Der Satz auf Aufgabenteil (a) hat zwei Bedeutungen: In der ersten Bedeutung berührt ein Mädchen einen Jungen mit einer Blume. In der anderen berührt ein Mädchen einen Jungen, der eine Blume hält. Obwohl beide Bedeutungen durch zwei syntaktisch absolut identische Sätze dargestellt werden, haben sie unterschiedliche Bedeutungen. Möchte man mit einer Grammatik diese beiden unterschiedlichen Bedeutungen repräsentieren, so darf man diesen beiden Bedeutungen nicht die gleiche Ableitung zuweisen. Damit ist die Eindeutigkeit, um natürliche Sprachen darzustellen, nicht erwünschenswert. Mehrdeutigkeit ist an dieser Stelle notwendig, um die Mehrdeutigkeit der Sprache darzustellen.

AUFGABE 7.2.

Stufe B

Zeigen Sie, dass es keine reguläre Sprache gibt, die inhärent mehrdeutig ist.

Lösungsskizze

Für jede reguläre Sprache L gibt es eine rechtslineare Grammatik, die die Sprache darstellt und aus dem minimalen DFA für L abgeleitet worden ist. Diese rechtslineare Grammatik ist aber eindeutig. Damit kann aber L nicht inhärent mehrdeutig sein.

AUFGABE 7.3.

Stufe C

Die CFG G bestehe aus folgenden Produktionen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & ASA \mid \mathsf{a}B \\ A & \to & B \mid S \mid CB \\ B & \to & \mathsf{b} \mid \varepsilon \\ C & \to & \mathsf{a}C \\ D & \to & \mathsf{a}SC\mathsf{b} \mid \mathsf{a} \end{array}$$

(a) Beschreiben Sie in eigenen Worten, wann ein Nichtterminal *nützlich* in einer Grammatik ist.
(b) Reduzieren Sie die Grammatik G auf die nützlichen Nichtterminale.
(c) Überführen Sie die reduzierte Grammatik dann in Chomsky-Normalform.
(d) Erklären Sie in eigenen Worten, wie Sie nach Überführen einer Grammatik in CNF überprüfen können, dass Sie keine Fehler gemacht haben.[1]

Lösungsskizze

(a) *Erzeugende Variablen*:
- $P_0 := \{X \mid \exists (X, \gamma) \in P.\ \gamma \in \Sigma^*\}$
- $P_{k+1} := P_k \cup \{X \in V \mid \exists (X, \gamma) \in P.\ \forall Y \in V.\ (|\gamma|_Y > 0 \to Y \in P_k)\}$ bis $P_{k+1} = P_k$.
- Führt auf:

$$P_0 = \{B, D\} \qquad P_1 = \{B, D, A, S\} = P_2$$

Damit kann C samt $C \to \mathsf{a}C$, $A \to CB$ und $D \to \mathsf{a}SC\mathsf{b}$ entfernt werden.

Erreichbare Variablen:
- $R_0 := \{\mathsf{S}\}$
- $R_{k+1} := R_k \cup \{Y \in V \mid \exists (X, \gamma) \in P.\ X \in R_k \wedge |\gamma|_Y > 0\}$ bis $R_{k+1} = R_k$.
- Führt auf:

$$R_0 = \{S\} \qquad R_1 = \{S, A, B\} = R_2$$

Damit kann D und $D \to a$ entfernt werden.

Ab jetzt steht G für die reduzierte (bereinigte) Grammatik:

$$S \to ASA \mid aB \qquad A \to B \mid S \qquad B \to b \mid \varepsilon$$

(b) *Überführung in CNF*:

[1] Hier geht es nicht um einen formalen Beweis, dass die beiden Sprachen gleich sind, sondern um eine Strategie, wie Sie bei Aufgaben wie im vorherigen Aufgabenteil Fehler vermeiden.

- In jeder Regel (X, γ) mit $|\gamma| \geq 2$ Ersetzen jedes Vorkommen eines Terminals x durch X_x und Ergänzen die benötigten Produktionen $X_x \to x$:

$$\mathsf{G}' \colon S \to ASA \mid X_aB \qquad A \to B \mid S \qquad B \to b \mid \varepsilon \qquad X_a \to a$$

Alle rechten Seiten sind jetzt von der Form $VVV^* \cup \Sigma$.
- Überführen aller rechten Seiten, welche aus mindestens drei Variablen bestehen, in quadratische Monome über V. Die einfachste Variante ist dabei, aus XYZ einfach XX_{YZ} machen, wobei X_{YZ} einfach eine Hilfsvariable ist, die das Ergebnis von YZ mittels $X_{YZ} \to YZ$ zugewiesen bekommt. Damit:

$$\mathsf{G}'' \colon S \to AX_{SA} \mid X_aB \qquad A \to B \mid S \qquad B \to b \mid \varepsilon \qquad X_a \to a \qquad X_{SA} \to SA$$

Erkennen von ε-Regeln :
- $E_0 := \{X \in V \mid (X, \varepsilon) \in P\}$
- $E_{k+1} := E_k \cup \{X \in V \mid \exists (X, \gamma) \in P.\ \gamma \in E_k^*\}$ bis $E_{k+1} = E_k$.

$$E_0 = \{B\} \qquad E_1 = \{B, A\} = E_2$$

- Erzeugen zusätzlicher Produktionen, welche alle möglichen Kombinationen von ε-Produktionen beachten:

$$\begin{array}{lcl}
S \to AX_{SA} & \rightsquigarrow & S \to AX_{SA} \mid X_{SA} \\
S \to X_aB & \rightsquigarrow & S \to X_aB \mid X_a \\
A \to B & \rightsquigarrow & A \to B \mid \varepsilon \\
A \to S & \rightsquigarrow & A \to S \\
B \to b & \rightsquigarrow & B \to b \\
B \to \varepsilon & \rightsquigarrow & B \to \varepsilon \\
X_a \to a & \rightsquigarrow & X_a \to a \\
X_{SA} \to SA & \rightsquigarrow & X_{SA} \to SA \mid S
\end{array}$$

- Entfernen aller ε-Produktionen:

$$\mathsf{G}''' \colon S \to AX_{SA} \mid X_{SA} \mid X_aB \mid X_a \qquad A \to B \mid S \qquad B \to b \qquad X_a \to a \qquad X_{SA} \to SA \mid S$$

Zusammenziehen von Kettenproduktionen :
- $T_0 := \{(X, Y) \in P \cap V \times V\}$
- $T_{k+1} := T_k \cup \{(X, Y) \in V \times V \mid \exists Z \in V.\ (X, Z) \in T_k \wedge (Z, Y) \in T_k\}$ bis $T_{k+1} = T_k =: T_*$ (einfach transitiver Abschluss über durch Kettenproduktionen gegebener Kantenrelation auf V).

$$\begin{array}{lcl}
T_0 & = & \{(S, X_{SA}), (S, X_a), (A, B), (A, S), (X_{SA}, S)\} \\
T_1 & = & T_0 \cup \{(S, S), (A, X_{SA}), (A, X_a), (X_{SA}, X_{SA}), (X_{SA}, X_a)\} = T_2
\end{array}$$

- Dann (1) Entfernen aller Kettenproduktion und (2) anschließend, falls $(X, Y) \in T_*$, füge (X, γ) zu P hinzu für jede Regel $(Y, \gamma) \in P$.

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{G}'''' & : & S \to AX_{SA} \mid SA \mid X_aB \mid a \\
& & A \to b \mid AX_{SA} \mid SA \mid X_aB \mid a \\
& & B \to b \\
& & X_a \to a \\
& & X_{SA} \to SA \mid AX_{SA} \mid SA \mid X_aB \mid a
\end{array}$$

AUFGABE 7.4. (*Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen*) Stufe C

Wir betrachten Pfeil-Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow\}$. Wir interpretieren dabei ein Wort $w \in \Sigma^*$ als einen Pfad in einem 2D-Gitter.

(a) Geben Sie eine formale Definition für die folgenden beiden Sprachen an:[2]
  (i) Pfade, die „umkehren“ — beliebig weit nach rechts fahren, dann noch weiter entweder nach oben oder unten gehen und letztlich wieder umkehren und noch weiter nach links fahren. Diese Pfade enden dann links vom Ursprung.
  (ii) Pfade, die in den Ursprung zurückkehren.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass diese Sprache nicht kontextfrei sind

[2] Wenn Ihnen nicht direkt eine formale Definition einfällt, gehen Sie wie wir auf Blatt 6 vor, d.h. machen Sie Beispiele von Wörtern, die in der Sprache enthalten bzw. nicht enthalten sind.

Lösungsskizze

(a) (i)

$$\mathsf{L}_a = \bigcup_{i<j<k} \mathsf{L}(\rightarrow^i (\uparrow^j \mid \downarrow^j) \leftarrow^k)$$

(ii)

$$\mathsf{L}_b = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_\uparrow = |w|_\downarrow \wedge |w|_\leftarrow = |w|_\rightarrow\}$$

(b) (i) Wir nehmen an, dass L_a kontextfrei ist und führen diese Annahme zum Widerspruch.
Sei $n \geq 1$ eine Pumping-Lemma-Zahl für die kontextfreie Sprache L_a. Dann ist $z = \rightarrow^n\uparrow^{n+1}\leftarrow^{n+2}$, d.h., $z \in \mathsf{L}_a$ und $|z| \geq n$. Gemäß Pumping-Lemma gibt es dann also eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit Wörtern $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ und den folgenden Eigenschaften:

$$(1)\ vx \neq \varepsilon \qquad (2)\ |vwx| \leq n \qquad (3)\ \forall i \in \mathbb{N}_0.\ uv^iwx^iy \in \mathsf{L}_a$$

Zuerst informell: Da $|vwx| \leq n$, kann vwx nur von der Form $\rightarrow^*\uparrow^*$ oder $\uparrow^*\leftarrow^*$ sein. Wegen $|vx| > 0$ muss mindestens ein Pfeil gepumpt werden. Gilt $vw \in \mathsf{L}(\uparrow^*)$, dann können wir die Anzahl der $\uparrow$ über die Anzahl der $\leftarrow$ pumpen, enthält vw mindestens ein $\rightarrow$ und damit kein $\leftarrow$, so kann man die Anzahl der $\rightarrow$ beliebig groß, insbesondere größer als die Anzahl der $\leftarrow$ machen. Besteht vw nur aus $\leftarrow$, dann aus mindestens einem, so dass man durch Entfernen von vx die Anzahl der $\leftarrow$ auf $n+1$ oder weniger reduziert wird, man also höchstens so viele $\leftarrow$ wie $\uparrow$ hat.
Formal: Aufgrund von (1) unterscheiden wir die folgenden Fälle:

- $|vx|_\rightarrow > 0$: Wegen (2) gilt $|vx|_\leftarrow = 0$. Allerdings gilt auch:

  $$\left|uv^3wx^3y\right|_\rightarrow = n + 2\,|vx|_\rightarrow \geq n + 2 = \left|uv^3wx^3y\right|_\leftarrow$$

  Dies ist ein Widerspruch zu (3).
- $|vx|_\rightarrow = 0$ und $|vx|_\uparrow > 0$: Dann gilt:

  $$\left|uv^0wx^0y\right|_\uparrow = n + 1 - |vx|_\uparrow \leq n = \left|uv^0wx^0y\right|_\rightarrow$$

  Daher ist $uv^0wx^0y \notin \mathsf{L}_a$, ein Widerspruch zu (3).
- $|vx|_\rightarrow = 0$ und $|vx|_\uparrow = 0$: Dann muss $|vx|_\leftarrow > 0$ gelten, und es folgt:

  $$\left|uv^0wx^0y\right|_\leftarrow = n + 2 - |vx|_\leftarrow < n + 1 = \left|uv^0wx^0y\right|_\uparrow$$

  Daher ist $uv^0wx^0y \notin \mathsf{L}_a$, ein Widerspruch zu (3).

Da jeder Fall zu einem Widerspruch führt und die obigen Fälle alle möglichen Zerlegungen abdecken, kann die ursprüngliche Annahme nicht gelten. Also ist L_a nicht kontextfrei.

(ii) Wir nehmen an, dass L_b kontextfrei ist und führen diese Annahme zum Widerspruch.
Sei $n \geq 1$ eine Pumping-Lemma-Zahl für die kontextfreie Sprache L_b. Sei zusätzlich $z = \rightarrow^n\uparrow^n\leftarrow^n\downarrow^n$, d.h., $z \in \mathsf{L}_b$ und $|z| \geq n$. Gemäß Pumping-Lemma gibt es dann also eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit Wörtern $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ und den folgenden Eigenschaften:

$$(1)\ vx \neq \varepsilon \qquad (2)\ |vwx| \leq n \qquad (3)\ \forall i \in \mathbb{N}_0.\ uv^iwx^iy \in \mathsf{L}_b$$

Aufgrund von (1) unterscheiden wir die folgenden Fälle:

- $|vx|_\rightarrow > 0$: Wegen (2) gilt $|vx|_\leftarrow = 0$. Allerdings gilt auch:

  $$\left|uv^2wx^2y\right|_\rightarrow = n + |vx|_\rightarrow > n = \left|uv^2wx^2y\right|_\leftarrow$$

  Dies ist ein Widerspruch zu (3).
- $|vx|_\uparrow > 0$: Wegen (2) gilt $|vx|_\downarrow = 0$. Allerdings gilt auch:

  $$\left|uv^2wx^2y\right|_\uparrow = n + |vx|_\uparrow > n = \left|uv^2wx^2y\right|_\downarrow$$

  Dies ist ein Widerspruch zu (3).
- $|vx|_\leftarrow > 0$: Wegen (2) gilt $|vx|_\rightarrow = 0$. Allerdings gilt auch:

  $$\left|uv^2wx^2y\right|_\rightarrow = n < n + |vx|_\leftarrow = \left|uv^2wx^2y\right|_\leftarrow$$

  Dies ist ein Widerspruch zu (3).
- $|vx|_\downarrow > 0$: Wegen (2) gilt $|vx|_\uparrow = 0$. Allerdings gilt auch:

  $$\left|uv^2wx^2y\right|_\uparrow = n < n + |vx|_\downarrow = \left|uv^2wx^2y\right|_\downarrow$$

  Dies ist ein Widerspruch zu (3).

Da jeder Fall zu einem Widerspruch führt und die obigen Fälle alle möglichen Zerlegungen abdecken, kann die ursprüngliche Annahme nicht gelten. Also ist L_b nicht kontextfrei.

AUFGABE 7.5.

Stufe D-E

(a) Erklären Sie, was man unter einer Familie von Grammatiken versteht und geben Sie ein eigenes Beispiel dazu an.
(b) Zeigen Sie, dass jede Grammatik G der Größe $\mathcal{O}(n)$, wenn man sie in CNF **entsprechend den Folien** übersetzt maximal nur quadratisch größer ($\mathcal{O}(n^2)$) werden kann.
(c) Zeigen Sie, dass es eine Familie von Grammatiken G_n der Größe $\mathcal{O}(n)$ gibt, die die folgende Behauptung erfüllt: *Überführt man G_n in CNF, indem man die Schritte der Folien umordnet nach (3), (4), (1), (2), dann ist die erzeugte Grammatik G'_n ebenfalls in CNF, jedoch exponentiell größer als G.*

Lösungsskizze

(a) Salopp: eine parametrisierte Grammatik.
(b) Sei n die Größe von G. (1) (2) fügt $\mathcal{O}(n)$ neue Regeln ein (und löscht teilweise einige). (3) (4) fügt jetzt aber nur $\mathcal{O}(n^2)$ neue Regeln ein, da die rechte Seite jeder Regel nur aus zwei Variablen besteht keine neue rechten Seiten der Länge erzeugt werden.
(c) $S \to X_1 X_2 \dots X_n \qquad X_i \to \mathsf{a} \mid \varepsilon$

AUFGABE 7.6.

Stufe E

Sei Σ ein Alphabet und $\mathsf{L} \subseteq \Sigma^*$. L ist *präfix-abgeschlossen*, wenn für alle $w \in \mathsf{L}$ und $v \in \Sigma^*$ mit $v \trianglelefteq w$ gilt: $v \in \mathsf{L}$.
Beweisen Sie, dass jede unendliche, präfix-abgeschlossene, kontextfreie Sprache eine unendliche, reguläre Teilmenge enthält.

Lösungsskizze
Sei L eine unendliche, präfix-abgeschlossene, kontextfreie Sprache. Sei $n \geq 1$ eine Pumping-Lemma-Zahl für die kontextfreie Sprache L. Da L unendlich ist, gibt es ein $z \in \mathsf{L}$ mit $|z| \geq n$. Gemäß Pumping-Lemma gibt es dann also eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit Wörtern $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ und den folgenden Eigenschaften:

$$(1)\ vx \neq \varepsilon \qquad (2)\ |vwx| \leq n \qquad (3)\ \forall i \in \mathbb{N}_0.\ uv^i wx^i y \in \mathsf{L}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- Angenommen sei $v \neq \varepsilon$. Dann definieren wir nun die reguläre Sprache R_1:

$$R_1 = \mathsf{L}(uv^*) = \{uv^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

  R_1 ist unendlich und regulär. Wir haben dann $R_1 \subseteq \mathsf{L}$, wegen der Präfix-Abgeschlossenheit und (3).
- Angenommen sei $v = \varepsilon$. Aus (1) folgt dann $x \neq \varepsilon$. Wir definieren nun die reguläre Sprache R_2:

$$R_2 = \mathsf{L}(uwx^*) = \{uwx^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

  R_2 ist unendlich und regulär. Wir haben dann $R_2 \subseteq \mathsf{L}$, wegen der Präfix-Abgeschlossenheit und (3).

AUFGABE 7.7. (*Richtig, richtig schwer...*)

Stufe E

Wir definieren die Rotation einer Sprache $\mathsf{L} \subseteq \Sigma^*$ als $R(\mathsf{L}) \coloneqq \{yx \mid xy \in \mathsf{L}\}$.
Beweisen Sie, dass kontextfreie Sprache unter Rotation abgeschlossen sind.

Lösungsskizze
Sei $\mathsf{G} = (V, \Sigma, P, \mathsf{S})$ eine kontextfreie Grammatik für L in CNF. Sei dann $\hat{\mathsf{G}} = (\hat{V}, \Sigma, \hat{P}, \hat{\mathsf{S}})$ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rcl} \hat{V} & = & V \cup \{X' \mid X \in V\} \cup \{\hat{S}\} \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\} \\ \hat{P} & = & P \cup \{\hat{S} \to S\} \cup \{\hat{S} \to \hat{a} \mid a \in \Sigma\} \\ & & \cup\ \{\hat{a} \to X'a \mid X \to a \in P\} \\ & & \cup\ \{Y' \to X'Y, Z' \to X'Y \mid X \to YZ \in P\} \\ & & \cup\ \{S' \to \varepsilon\} \end{array}$$

Sei $\varepsilon \notin \mathsf{L}$. Dann gilt $X \to_G^* uv$ mit $u \neq \varepsilon$ gdw. $\hat{S} \to_{\hat{G}}^* vX'u$. Was mit mit Induktion über die Länge der Ableitungen gezeigt werden kann. Vielen Dank an Michael Luttenberger, der diese Lösungsskizze beigetragen hat.