Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2017 – Übungsblatt Lösungsskizze 5

Übungsblatt

Wir unterscheiden zwischen Übungs- und Abgabeblättern. Auf diesem *Übungsblatt* finden Sie eine Übersicht über die Kernaspekte, die Sie in Kalenderwoche 22 in den Tutorien diskutieren, üben und vertiefen. Die Aufgaben auf diesem Blatt dienen dem Üben und Verstehen des Vorlesungsstoffes, sowie dem *eigenständigen Erarbeiten* der Kernaspekte. Außerdem sollen Ihnen diese Aufgaben auch helfen, ein Gefühl dafür zu bekommen, was Sie inhaltlich in der Klausur erwartet. Klausuraufgaben können jedoch deutlich von den hier gestellten Aufgaben abweichen. Abschreiben und Auswendiglernen von Lösungen wird Ihnen daher keinen dauerhaften Erfolg in der Vorlesung bringen. Fragen zu den Übungsblättern können Sie montags bis donnerstags von 12 Uhr bis 14 Uhr in der *THEO-Sprechstunde* in Raum 03.11.034 stellen.

Kernaspekte

K5.1 korrektes Wiedergeben der folgenden Definitionen

- Myhill-Nerode-Relation
- Äquivalenzklasse
- inäquivalente Zustände in einem DFA

K5.2 zu einem gegebenen DFA den minimalen DFA angeben
K5.3 zu einem gegebenen Automaten den Quotientenautomaten angeben
K5.4 für reguläre Sprachen Sprachgleichheit mithilfe von Minimierung prüfen
K5.5 mithilfe der Myhill-Nerode-Relation beweisen bzw. widerlegen, dass eine gegebene Sprache regulär ist

AUFGABE 5.1.

Stufe B

Geben Sie jeweils eine formale Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ mit folgenden Eigenschaften an:

(a) endlich (b) unendlich und regulär (c) nicht regulär und kontextfrei

Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie Sie bei der Konstruktion der Sprachen vorgegangen sind, um sicher zu stellen, dass die Sprache die gewünschte Eigenschaft hat.

Lösungsskizze

(a) $\mathsf{A} = \emptyset$ (b) $\mathsf{B} = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*)$ (c) $\mathsf{C} = \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

AUFGABE 5.2.

Stufe C

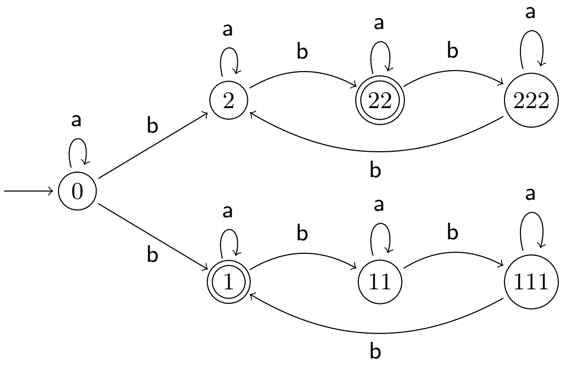
In der Vorlesung haben Sie ein Verfahren zur Minimierung von DFAs gesehen. Wir erweitern diesen Algorithmus, damit er zusätzlich das unterscheidende Wort w für ein Paar inäquivalenter Zuständen berechnet.

(a) Erweitern Sie den Minimierungsalgorithmus so, dass er für jedes Paar von inäquivalenten Zuständen $q, p \in \mathsf{Q}$ eines DFAs $\mathsf{D} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, \mathsf{q}_0, \mathsf{F})$ ein kürzestes Wort $w_{\{q,p\}}$ mit $\delta(q, w_{\{q,p\}}) \in \mathsf{F} \Leftrightarrow \delta(p, w_{\{q,p\}}) \notin \mathsf{F}$ berechnet.

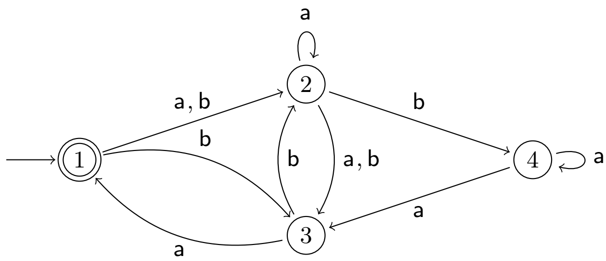
(b) Determinisieren und dann minimieren Sie die folgenden NFAs. Verwenden Sie hierfür den erweiterten Minimierungsalgorithmus aus (a). Bestimmen Sie hierbei auch die Abhängigkeiten $D[\{p, q\}]$ zwischen den Paaren der Zustände gemäß dem Verfahren der Vorlesung.

(i) NFA N_1:

(ii) NFA N_2:



(iii) NFA N_3:

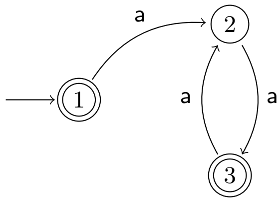


Hinweise:

- Konstruieren Sie bei der Determinisierung nur die vom Startzustand erreichbaren Zustände.
- Wir verwenden das Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$.

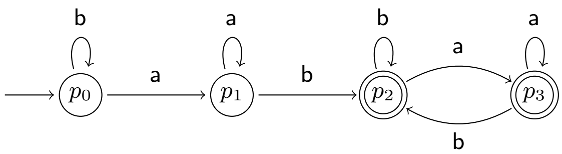
Lösungsskizze

(a) Im Folgenden bezeichnen wir mit U die Menge aller unterscheidbaren Zustandspaare. Für alle Paare $\{p, q\} \in U$ kann man $w_{\{p,q\}} \coloneqq \varepsilon$ verwenden. Fügt man dann in der Schleife $\{p, q\}$ neu zu U hinzu, da $\{\delta(p, \mathsf{a}), \delta(q, \mathsf{a})\} \in U$, so kann man $w_{\{p,q\}} = \mathsf{a}w_{\{\delta(p,\mathsf{a}),\delta(q,\mathsf{a})\}}$ setzen. Hinweis für Tutoren: Wiederholen Sie den Algorithmus für:



(b) Der NFA muss erst zu einem DFA determinisiert werden:

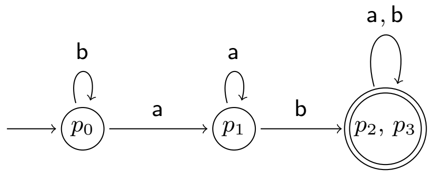
(i)
- DFA D_1:



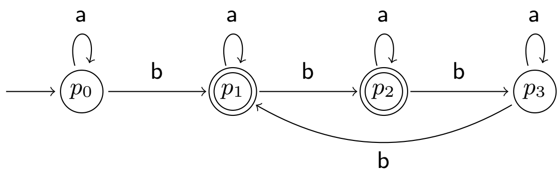
- Tabelle:

	p_3	p_0	p_2	p_1
p_3	$-$	$-$	$-$	$-$
p_0	ε	$-$	$-$	$-$
p_2	$=$	ε	$-$	$-$
p_1	ε	b	ε	$-$

- Minimierter DFA D_1^m:



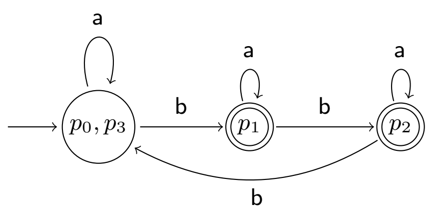
(ii) • DFA D_2:



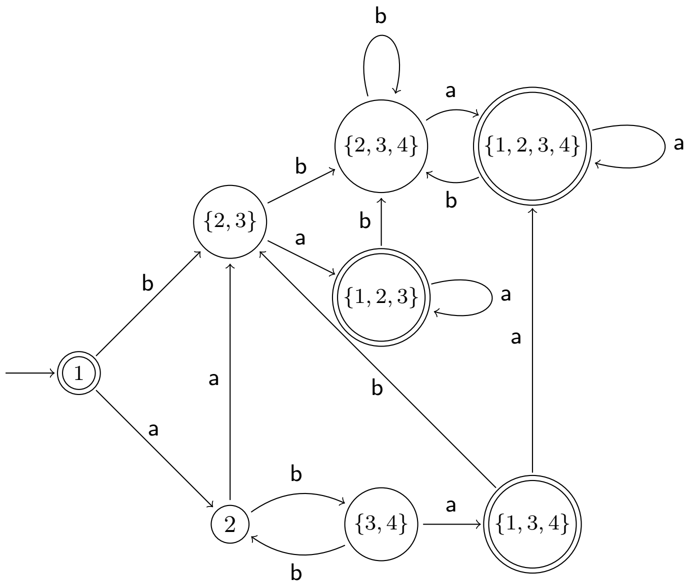
• Tabelle:

	p_1	p_2	p_0	p_3
p_1	–	–	–	–
p_2	b	–	–	–
p_0	ε	ε	–	–
p_3	ε	ε	=	–

• Minimierter DFA D_2^m:



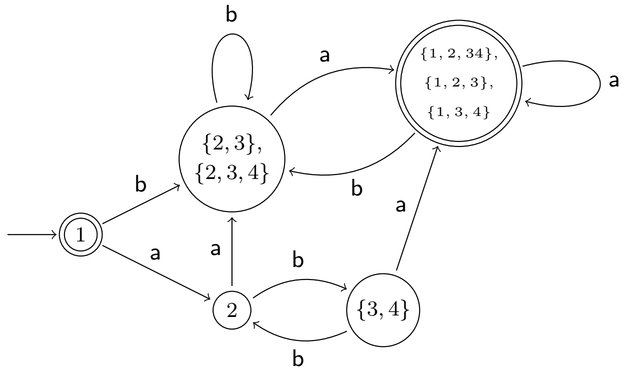
(iii) • DFA D_3:



• Tabelle:

	{1,3,4}	{1,2,3,4}	{3,4}	{2,3,4}	{1,2,3}	{2,3}	{1}	{2}
{1,3,4}	–	–	–	–	–	–	–	–
{1,2,3,4}	=	–	–	–	–	–	–	–
{3,4}	ε	ε	–	–	–	–	–	–
{2,3,4}	ε	ε	ba	–	–	–	–	–
{1,2,3}	=	=	ε	ε	–	–	–	–
{2,3}	ε	ε	ba	=	ε	–	–	–
{1}	a	a	ε	ε	a	ε	–	–
{2}	ε	ε	a	a	ε	a	ε	–

• Minimierter DFA D_3^m:



AUFGABE 5.3. Stufe C

Sei $\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^*\mathsf{c}^*)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$.

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Äquivalenzen wahr sind und begründen Sie Ihre Antwort:

- $\varepsilon \overset{?}{\equiv}_\mathsf{L} \mathsf{a}$
- $\mathsf{b} \overset{?}{\equiv}_\mathsf{L} \mathsf{c}$
- $\mathsf{abc} \overset{?}{\equiv}_\mathsf{L} \mathsf{cba}$

(b) Sei $v = \mathsf{aababc}$. Geben Sie ein Wort $u \neq v$ an, so dass $u \equiv_\mathsf{L} v$.

(c) Geben Sie die Mengen $[\mathsf{ab}]_\mathsf{L}$, $[\mathsf{bc}]_\mathsf{L}$ und $[\mathsf{ca}]_\mathsf{L}$ an.

(d) Geben Sie nun L', so dass $\mathsf{c} \equiv_{\mathsf{L}'} \mathsf{ba}$, $\mathsf{c} \not\equiv_{\mathsf{L}'} \mathsf{ab}$ und $\mathsf{aba} \equiv_{\mathsf{L}'} \mathsf{bab}$. Weiterhin soll $\varepsilon, \mathsf{aba} \in \mathsf{L}'$ gelten.

Lösungsskizze

(a)
- $\varepsilon \equiv_\mathsf{L} \mathsf{a}$, da $\forall w \in \Sigma^*.\ w \in \mathsf{L} \Leftrightarrow \mathsf{a}w \in \mathsf{L}$.
- $\mathsf{b} \not\equiv_\mathsf{L} \mathsf{c}$, da $\mathsf{bb} \in \mathsf{L}$ aber $\mathsf{cb} \notin \mathsf{L}$.
- $\mathsf{abc} \not\equiv_\mathsf{L} \mathsf{cba}$, da $\mathsf{abc} \in \mathsf{L}$ aber $\mathsf{cba} \notin \mathsf{L}$.

(b) ba

(c) $[\mathsf{ab}]_\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^+)$, $[\mathsf{bc}]_\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^*\mathsf{c}^+)$ und $[\mathsf{ca}]_\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{a}^*\mathsf{b}^+\mathsf{a} \mid \mathsf{a}^*\mathsf{b}^*\mathsf{c}^+(\mathsf{a} \mid \mathsf{b}))\Sigma^*$.

(d) $\mathsf{L}' = \{\varepsilon, \mathsf{aba}, \mathsf{bab}, \mathsf{c}, \mathsf{ba}, \mathsf{cb}\}$.

AUFGABE 5.4. Stufe D

Entscheiden Sie, ob folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ regulär sind. Bestimmen Sie hierzu die Äquivalenzklassen der dazugehörigen Myhill-Nerode-Relation. Falls die Sprache regulär ist, zählen Sie alle Äquivalenzklassen auf und zeichnen Sie den kanonischen Minimalautomat $M_\mathsf{L} = (\Sigma^*/\equiv_\mathsf{L}, \Sigma, \delta_\mathsf{L}, [\varepsilon]_{\equiv_\mathsf{L}}, F_\mathsf{L})$. Falls die Sprache nicht regulär ist, reicht es eine unendliche Menge von Äquivalenzklassen zu bestimmen.

(a) $\mathsf{L}_1 = \{\mathsf{a}^{2i} \mid i \in \mathbb{N}_0\}$

(b) $\mathsf{L}_2 = \{\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i\mathsf{c}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$

(c) $\mathsf{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_\mathsf{a} = 2 \cdot |w|_\mathsf{b}\}$

(d) $\mathsf{L}_4 = \mathsf{L}((\mathsf{a}^*(\mathsf{b} \mid \mathsf{c}))^*)$

(e) $\mathsf{L}_5 = \{w\mathsf{c}w \mid w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^*\}$

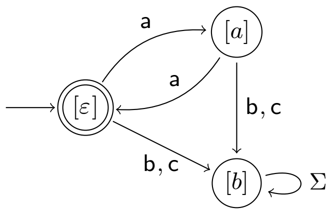
Lösungsskizze

Hinweis: Da die Sprachen aus dem Kontext ersichtlich ist, lassen wir den L_i Subscript bei $\equiv$ und $[w]$ weg.

(a)
- Bestimmen der Äquivalenzklassen:

$$[\varepsilon] = \mathsf{L}_1 \qquad [\mathsf{a}] = \{\mathsf{a}^{2i+1} \mid i \in \mathbb{N}_0\} \qquad [\mathsf{b}] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b > 0 \lor |w|_c > 0\}$$

- Kanonischer DFA:

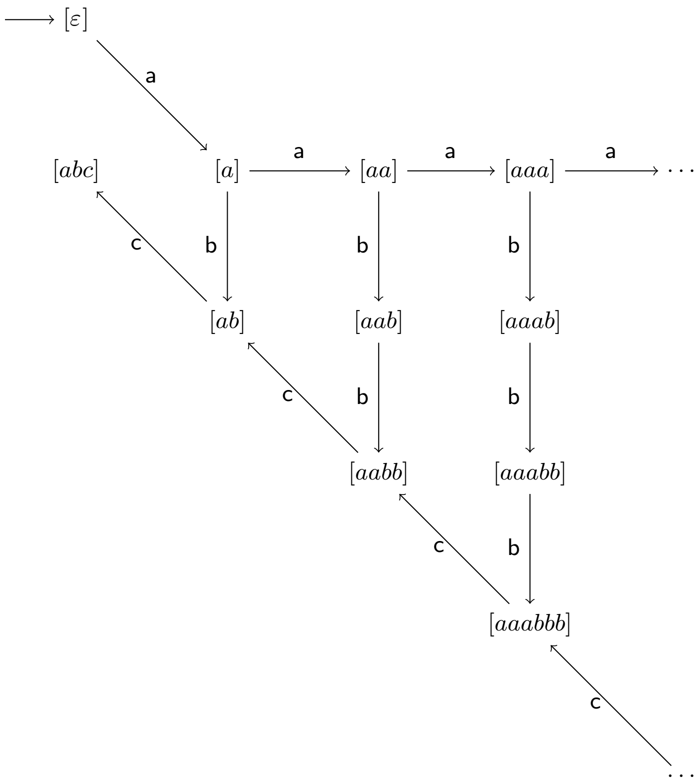


(b)
- Bestimmen einer unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

$$\{[\mathsf{a}^i] \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Beweis: Sei $i, j \in \mathbb{N}_0$ verschieden. Dann $\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i\mathsf{c}^i \in \mathsf{L}_2$, aber $\mathsf{a}^j\mathsf{b}^i\mathsf{c}^i \notin \mathsf{L}_2$. Daher $[\mathsf{a}^i] \neq [\mathsf{a}^j]$. Somit ist die Menge unendlich und L_2 keine reguläre Sprache.

- Unendliches Transitionssystem (Ablehnende Äquivalenzklasse und entsprechende Transitionen sind nicht gezeichnet):



(c)
- Bestimmen einer unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

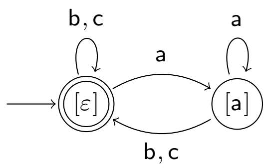
$$\{[\mathsf{b}^i] \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Beweis: Sei $i, j \in \mathbb{N}_0$ verschieden. Dann $\mathsf{b}^i\mathsf{a}^{2\cdot i} \in \mathsf{L}_3$, aber $\mathsf{b}^j\mathsf{a}^{2\cdot i} \notin \mathsf{L}_3$. Daher $[\mathsf{b}^i] \neq [\mathsf{b}^j]$. Somit ist die Menge unendlich und L_3 keine reguläre Sprache.

(d)
- Bestimmen der Äquivalenzklassen:

$$[\varepsilon] = \mathsf{L}((\mathsf{a}^*(\mathsf{b} \mid \mathsf{c}))^*) = \mathsf{L}_4 \qquad [\mathsf{a}] = [\varepsilon]\{\mathsf{a}\}^+$$

- Kanonischer DFA:



(e)
- Bestimmen der unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

$$\{[\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i] \mid w \in \Sigma^*\}$$

Beweis: Sei $i, j \in \mathbb{N}_0$ verschieden. Dann $\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i\mathsf{c}\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i \in \mathsf{L}_5$, aber $\mathsf{a}^j\mathsf{b}^j\mathsf{c}\mathsf{a}^i\mathsf{b}^i \notin \mathsf{L}_5$. Somit ist die Menge unendlich und L_5 keine reguläre Sprache.

Definition (Monoid)

Ein Monoid $\langle M, \circ, 1\rangle$ besteht aus einer (Träger-)Menge M, einer assoziativen Abbildung $\circ\colon M \times M \to M$ und einem bzgl. $\circ$ neutralen Element $1 \in M$ (d.h. $\forall m \in M.\ m \circ 1 = m = 1 \circ m$). Ist $\circ$ kommutativ, dann wird $\langle M, \circ, 1\rangle$ als kommutatives Monoid bezeichnet. Gilt $\forall m \in M.\ m \circ m = m$, so wird $\langle M, \circ, 1\rangle$ als **idempotentes** Monoid bezeichnet.

Definition (Kleene Algebra)

Eine *Kleene Algebra* $\langle K, +, \cdot, ^*, 0, 1\rangle$ besteht aus einer Trägermenge K, den binären Operationen $+\colon K \times K \to K$ (Addition), $\cdot\colon K \times K \to K$ (Multiplikation), der unären Operation $^*\colon K \to K$ (Stern) und zwei Konstanten $0, 1 \in K$. Mittels der Addition definiert man die binäre Relation $\sqsubseteq$ auf K durch

$$a \sqsubseteq b \overset{\text{Def}}{\longleftrightarrow} a + b = b$$

Wie üblich schreibt man kurz ab für $a \cdot b$. Um Klammern zu sparen, gilt "Stern vor Punkt vor Strich".
Eine Kleene Algebra erfüllt folgende Eigenschaften für alle $a, b, c, x \in K$:

Ax1: $\langle K, +, 0\rangle$ ist ein kommutatives und idempotentes Monoid.

Ax2: $\langle K, \cdot, 1\rangle$ ist ein Monoid.

Ax3: $a(b + c) = ab + ac$ und $(a + b)c = ac + bc$.

Ax4: $a0 = 0 = 0a$.

Ax5: $1 + aa^* \sqsubseteq a^*$ und $1 + a^*a \sqsubseteq a^*$.

Ax6: $b + ax \sqsubseteq x \to a^*b \sqsubseteq x$ und $b + xa \sqsubseteq x \to ba^* \sqsubseteq x$.

AUFGABE 5.5.

Stufe E

In dieser Aufgabe abstrahieren wir von der konkreten Interpretation von regulären Ausdrücken als Konstruktionsbeschreibungen regulärer Sprachen. Ziel ist es den Zusammenhang mit Pfadproblemen im Bereich der Informatik und dem Lösen linearer Gleichungssysteme zu verdeutlichen.

(a) Sei Σ ein Alphabet. Beweisen Sie, dass $\langle 2^{\Sigma^*}, \cup, \circ, ^*, \emptyset, \{\varepsilon\}\rangle$ eine Kleene Algebra ist für

$$LL' := L \circ L' := \{ww' \mid w \in L, w' \in L'\} \qquad \text{und} \qquad L^* := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} L^k$$

(b) Die Addition und das Minimum auf $\mathbb{R}$ seien auf $[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wie folgt erweitert:

$$\infty + a = \infty \quad -\infty + a = -\infty \quad -\infty + \infty = \infty$$

$$\min(a, \infty) = a \quad \min(a, -\infty) = -\infty \quad \min(-\infty, \infty) = -\infty$$

Weiterhin gelte:

$$a^* := \begin{cases} -\infty & \text{falls } a \in [-\infty, 0) \\ 0 & \text{falls } a \in [0, \infty] \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\langle \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \min, +, ^*, \infty, 0\rangle$ eine Kleene Algebra ist.

(c) Zeigen Sie, dass in jeder Kleene Algebra $\langle K, +, \cdot, ^*, 0, 1\rangle$ für beliebige $a, b, c, d, e, f \in K$ gilt:

(i) $\sqsubseteq$ ist eine partielle Ordnung auf K, die monoton bzgl. Addition, Multiplikation und Stern ist, d.h.:

$$a \sqsubseteq b \to (ca \sqsubseteq cb \wedge ac \sqsubseteq bc \wedge a + c \sqsubseteq b + c \wedge a^* \sqsubseteq b^*)$$

(ii) a^*b ist die bzgl. $\sqsubseteq$ kleinste Lösung der linearen Ungleichung $b + aX \sqsubseteq X$ in K (X Variable), genauer:

$$b + a(a^*b) \sqsubseteq a^*b \qquad \wedge \qquad \forall x \in K\colon b + ax \sqsubseteq x \to a^*b \sqsubseteq x$$

Entsprechend ist ba^* die kleinste Lösung in K von $b + Xa \sqsubseteq X$.

Man kann zeigen, dass jedes lineare Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \dots a_{1,n}X_n + b_1 &\sqsubseteq X_1 \\ &\vdots \\ a_{n,1}X_1 + a_{n,2}X_2 + \dots a_{n,n}X_n + b_n &\sqsubseteq X_n \end{aligned}$$

mit $a_{i,j}, b_i \in K$ und $X_1, \ldots, X_n$ Variablen stets eine eindeutige $\sqsubseteq$-kleinste Lösung in K hat, d.h. dass es konkrete Elemente $x_1, \ldots, x_n \in K$ gibt, so dass für $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ alle obigen Ungleichungen erfüllt sind, und für jede weitere Lösung $X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n \in K$ stets $x_i \sqsubseteq y_i$ gilt. Insbesondere gilt

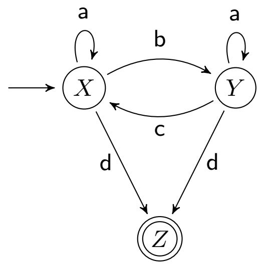
$$x_1 = a_{1,1}^*(a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + b_1)$$

Somit kann das Gauß-Verfahren zur Bestimmung von $x_1, \ldots, x_n$ verwendet werden.

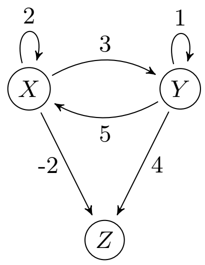
(d) Bestimmen Sie die kleinste Lösung x_1, x_2, x_3, x_4 für folgendes System:

$$\begin{array}{rcl} aX + bY + eZ & \sqsubseteq & X \\ cX + dY + fZ & \sqsubseteq & Y \\ 1 & \sqsubseteq & Z \end{array}$$

(e) Bestimmen Sie den regulären Ausdruck für den Zustand X. Durch welche Werte muss man a, b, c, d, e, f konkret ersetzen, damit sich die in (d) berechneten Terme in $\langle 2^{\Sigma^*}, \cup, \circ, ^*, \emptyset, \{\varepsilon\}\rangle$ zu dem gewünschten Ausdruck auswertet?



(f) Bestimmen Sie die Länge eines kürzesten Pfades von jedem Knoten zum Knoten Z in folgendem gewichteten Graphen. Durch welche Werte muss man a, b, c, d, e, f konkret ersetzen, damit sich die in (d) berechneten Terme in $\langle \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \min, +, \infty, 0\rangle$ zu den gesuchten Pfadlängen auswerten?



Lösungsskizze

(a) Nur Stern überprüfen, Rest sollte klar sein. $\sqsubseteq$ entspricht hier $\subseteq$.
$1 + aa^* \sqsubseteq a^*$ wird zu $\{\varepsilon\} \cup AA^* \subseteq A^*$ mit $A \subseteq \Sigma^*$, was man leicht nachrechnet:

$$\{\varepsilon\} \cup AA^* = \{\varepsilon\} \cup A \bigcup_{k\geq 0} A^k = A^0 \cup \bigcup_{k\geq 1} A^k = A^*$$

Entsprechend für $1 + a^*a \sqsubseteq a^*$.
$b + ax \sqsubseteq x \to a^*b \sqsubseteq x$ wird zu

$$B \cup AX \subseteq X \to A^*B \subseteq X$$

mit $A, B, X \subseteq \Sigma^*$.
Mittels Induktion zeigt man nun, dass $A^kB \subseteq X$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ unter Verwendung von $B \cup AX \subseteq X$:

- $k = 0$: $A^0B = \{\varepsilon\}B = B \subseteq B \cup AX \subseteq X$.
- $k \to k + 1$: Für $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert gelte $A^kB \subseteq X$. Damit:

$$A^{k+1}B = A(A^kB) \subseteq AX \subseteq B \cup AX \subseteq X$$

Damit:

$$A^*B = \bigcup_{k\geq 0} A^kB \subseteq \bigcup_{k\geq 0} X = X$$

was zu zeigen war.

(b) Zur Verdeutlichung, welche Addition gemeint ist: $+_\mathbb{R}$ bezeichnet die übliche Addition auf den reellen Zahlen (erweitert auf $\pm\infty$).
Beachten: $\sqsubseteq$ auf K entspricht hier $\geq$ auf den reellen Zahlen

$$a \sqsubseteq b \text{ gdw. } \min(a,b) = b \text{ gdw. } a \geq b$$

$1 + aa^* \sqsubseteq a^*$ wird zu $\min(0, a +_\mathbb{R} a^*) \geq a^*$:
Gilt $a \geq 0$, so folgt $a^* = 0$ und damit $\min(0, a +_\mathbb{R} a^*) = 0 = a^*$; gilt $a < 0$, so folgt $a^* = -\infty$ und damit $\min(0, a +_\mathbb{R} a^*) = -\infty = a^*$. Für $1 +_\mathbb{R} a^*a \sqsubseteq a$ symmetrisch.
Aus $b + ax \sqsubseteq x \to a^*b \sqsubseteq x$ wird $\min(b, a +_\mathbb{R} x) \geq x \to a^* +_\mathbb{R} b \geq x$:
Aus $\min(b, a +_\mathbb{R} x) \geq x$ folgt $b \geq x \wedge a +_\mathbb{R} x \geq x$, damit $a \geq 0$ und somit auch $a^* = 0$, womit $a^* +_\mathbb{R} b \geq x$ stets gilt.

(c) (i) Reflexivität folgt aus der Definition von $\sqsubseteq$ und der Idempotenz von $+$:

$$a \sqsubseteq a \xleftrightarrow{\text{nDef}} a + a = a$$

Antisymmetrie folgt aus der Definition von $\sqsubseteq$ und der Kommutativität von $+$:

$$b \overset{a \sqsubseteq b}{=} a + b = b + a \overset{b \sqsubseteq a}{=} a$$

Transitivität folgt aus der Definition von $\sqsubseteq$ und der Assoziativität von $+$:

$$c \overset{b \sqsubseteq c}{=} c + b \overset{a \sqsubseteq b}{=} c + (b + a) = (c + b) + a \overset{b \sqsubseteq c}{=} c + a$$

Es gelte $a \sqsubseteq b$. Monotonie von $+$:

$$c + b \overset{a \sqsubseteq b}{=} c + (b + a) = (c + a) + b \overset{\text{Def } \sqsubseteq}{\sqsupseteq} c + a$$

Entsprechend Monotonie von $\cdot$:

$$cb \overset{a \sqsubseteq b}{=} c(b + a) = cb + ca \overset{\text{Def } \sqsubseteq}{\sqsupseteq} ca$$

Bleibt die Monotonie von *: mit Ax5 und der Monotonie von $\cdot$

$$b^* \sqsupseteq 1 + bb^* \sqsupseteq 1 + ab^*$$

womit sofort aus Ax6 $a^* \sqsubseteq b^*$ folgt (in Ax6 1 für b und b^* für x substituieren).

(ii) Wir zeigen zuerst den Speziallfall mit $b = 1$:
$1 + aa^* \sqsubseteq a^*$ ist Ax5. Bleibt $a^* \sqsubseteq 1 + aa^*$.
Nach Ax6 $b + ax \leq x \to a^*b \leq x$ mit 1 substituiert für b und $1 + aa^*$ substituiert für x reicht es zu zeigen, dass

$$1 + a(\underbrace{1 + aa^*}_{\sqsubseteq a^* (\text{Ax5})}) \sqsubseteq 1 + aa^*$$

was aber wegen Ax5 ($1 + aa^* \sqsubseteq a^*$) und der Monotonie von $\sqsubseteq$ gilt. Symmetrisch folgt $1 + a^*a = a^*$.
Damit folgt auch sofort $b + a(a^*b) = (1 + aa^*)b = a^*b$ und symmetrisch $b + (ba^*)a = ba^*$.
Somit hat $b + aX \sqsubseteq X$ mit $X = a^*b$ mindestens eine Lösung, für – wie gerade gezeigt – die sogar Gleichheit gilt, nach Ax6 ist jede weitere Lösung größer als a^*b. Symmetrisch für $b + Xa \sqsubseteq X$ und $X = ba^*$.

(d) $1 \sqsubseteq Z$ führt auf $Z = 1$.
Damit ergibt sich $Y = d^*(cX + f)$ aus

$$cX + dY + fZ \sqsubseteq Y$$

Und damit $X = (a + bd^*c)^*(e + bd^*f)$ aus

$$aX + bY + eZ \sqsubseteq X$$

Damit schließlich $Y = d^*c(a + bd^*c)^*(e + bd^*f) + d^*f$.
Bemerkung: Man kann natürlich auch zuerst nach X und dann nach Y lösen, was auf

$$X = a^*(bY + e)$$

und damit auf

$$Y = (d + ca^*b)^*(f + ca^*e) \qquad X = a^*b(d + ca^*b)^*(f + ca^*e) + a^*e$$

führt.
Da die erhaltenen Terme jeweils die eindeutige kleinste Lösung beschreiben müssen, folgt z.B.

$$Y = (d + ca^*b)^*(f + ca^*e) = d^*c(a + bd^*c)^*(e + bd^*f) + d^*f$$

(e) Stellt man das LGS nach VL für den NFA auf, so erhält man genau das System aus (d) – mit der einzigen Aussnahme, dass statt der abstrakten Operationen die konkreten Operationen für Sprachen verwendet werden. Die Lösungsschritte aus (d) können somit auch im konkreten Fall angewendet werden. Insbesondere beschreiben die Terme aus (d) bzw. die entsprechenden regulären Ausdrücke gerade alle Pfade von X bzw. Y nach Z (siehe auch Folien).
Beispiel: aus

$$d^*c(a + bd^*c)^*(bd^*f + e) + d^*f$$

wird mit den Werten $a = \mathsf{a}, b = \mathsf{b}, c = \mathsf{c}, d = \mathsf{a}, e = f = \mathsf{d}$

$$L(\mathsf{a}^*\mathsf{c}(\mathsf{a} \mid \mathsf{ba}^*\mathsf{c})^*(\mathsf{ba}^*\mathsf{d} \mid \mathsf{d})|\mathsf{a}^*\mathsf{d})$$

(f) Von X nach Z geht man direkt: -2
Von Y nach Z geht man über X: $5 - 2 = 3$
Von Z nach Z: 0
Setzt man $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 1$, $e = -2$ und $f = 4$, so werten sich die Ausdrücke aus (d) mit min als Addition und + als Multiplikation gerade zu diesen Werten aus.
Beispiel: Aus

$$d^*c(a + bd^*c)^*(bd^*f + e) + d^*f$$

wird

$$\min(1^* + 5 + (\min(2, 3 + 1^* + 5))^* + \min(3 + 1^* + 4, -2), 1^* + 4) = \min(0 + 5 + 0 - 2, 0 + 4) = 3$$