Prof. J. Esparza
S. Sickert, J. Krämer

Technische Universität München
KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2017 – Übungsblatt 3

Übungsblatt

Wir unterscheiden zwischen Übungs- und Abgabeblättern. Auf diesem *Übungsblatt* finden Sie eine Übersicht über die Kernaspekte, die Sie in Kalenderwoche 20 in den Tutorien diskutieren, üben und vertiefen. Die Aufgaben auf diesem Blatt dienen dem Üben und Verstehen des Vorlesungsstoffes, sowie dem *eigenständigen Erarbeiten* der Kernaspekte. Außerdem sollen Ihnen diese Aufgaben auch helfen, ein Gefühl dafür zu bekommen, was Sie inhaltlich in der Klausur erwartet. Klausuraufgaben können jedoch deutlich von den hier gestellten Aufgaben abweichen. Abschreiben und Auswendiglernen von Lösungen wird Ihnen daher keinen dauerhaften Erfolg in der Vorlesung bringen. Fragen zu den Übungsblättern können Sie montags bis donnerstags von 12 Uhr bis 14 Uhr in der *THEO-Sprechstunde* in Raum 03.11.034 stellen.

Kernaspekte

K3.1 korrektes Wiedergeben der folgenden Definitionen

- regulärer Ausdruck
- sternfreier Ausdruck
- ε-NFA
- Produktkonstruktion

K3.2 eine (natürlichsprachlich) gegebene Sprache als regulären Ausdruck darstellen
K3.3 strukturelle Induktion über Grammatiken und reguläre Ausdrücke führen, um Eigenschaften der beschriebenen Sprache zu beweisen
K3.4 Funktionen über reguläre Ausdrücke definieren
K3.5 einen regulären Ausdruck r in einen NFA N übersetzen, so dass $\mathsf{L}(r) = \mathsf{L}(\mathsf{N})$
K3.6 einen ε-NFA N mittels Potenzmengenkonstruktion in einen DFA D übersetzen, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{N}) = \mathsf{L}(\mathsf{D})$
K3.7 den Schnitt zweier regulärer Sprachen mithilfe der Produktkonstruktion bilden
K3.8 begründet entscheiden, ob gegebene Beispiele neu eingeführte Definitionen erfüllen
K3.9 Aussagen, mit neu eingeführten Definitionen beweisen oder widerlegen

*Die folgende Aufgabe kann auch online gelöst werden. Melden Sie sich auf `http://automatatutor.com` an und schreiben Sie sich in den Kurs **130THEO20** mit dem Passwort **IJD1DLKQ** ein. Wir empfehlen die Benutzung von Mozilla Firefox, da mit anderen Browsern die Darstellung teilweise inkorrekt sein kann.*

AUFGABE 3.1.

Stufe B

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen regulären Ausdruck an, der genau die Sprache beschreibt. Verwenden Sie für die ersten drei Aufgaben das Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ und für die letzten beiden $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) Wörter gerader Länge.
(b) Wörter, die mit einem a beginnen und enden, sowie Wörter, die mit einem b beginnen und enden.
(c) Wörter, in denen kein a neben einem b steht.
(d) Zahlen in Binärdarstellung (most-significant-bit-first), die durch 2 teilbar sind.
(e) Zahlen in Binärdarstellung (most-significant-bit-first), die nicht durch 4 teilbar sind.

AUFGABE 3.2.

Stufe C

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Geben Sie einen regulären Ausdruck mit möglichst wenigen Zeichen für die Sprache an, in der alle Wörter gleich oft die Zeichenketten ab und ba enthalten.
Beispiel: Das Wort abab enthält zweimal ab, aber nur einmal ba und soll somit *kein* Element der Sprache sein.

AUFGABE 3.3. Stufe C

Wir übersetzen den regulären Ausdruck $r = (\mathsf{a} \mid \mathsf{b})^*\mathsf{a}$ in zwei Schritten zu einem DFA.

(a) Geben Sie **mit dem Verfahren aus der Vorlesung** einen ε-NFA N mit $\mathsf{L}(\mathsf{N}) = \mathsf{L}((\mathsf{a} \mid \mathsf{b})^*\mathsf{a})$ an. Halten Sie sich strikt an die Konstruktion aus den Folien. Als NFA für $x \in \Sigma$ verwenden Sie hierfür den (bis auf Knotenbenennung) kanonischen ε-NFA $(\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{(q_0, x, q_1) \mid x \in \Sigma\}, q_0, \{q_1\})$.

(b) Die Potenzmengenkonstruktion lässt sich auf ε-NFAs wie folgt erweitern:
Gegeben ein ε-NFA $\mathsf{N} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, \mathsf{q}_0, \mathsf{F})$ sei $\mathsf{D}' = (\mathsf{Q}', \Sigma', \delta', \mathsf{I}', \mathsf{F}')$ wie folgt definiert:

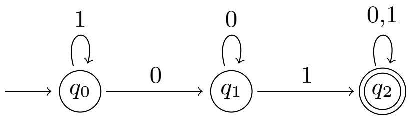
- $\mathsf{I}' := \bigcup_{i \geq 0} \delta(q_0, \varepsilon^i)$.
- Q' und $\delta' \colon \mathsf{Q}' \times \Sigma \to \mathsf{Q}'$ sind induktiv wie folgt definiert:
  - $\mathsf{I}' \in \mathsf{Q}'$.
  - Falls $S \in \mathsf{Q}'$, dann
  $$\delta'(S, x) := \bigcup_{q \in S, i \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}_0} \delta(q, \varepsilon^i x \varepsilon^j)$$
  für jedes $x \in \Sigma$ und $\delta'(S, x) \in \mathsf{Q}'$.
  - Ansonsten enthält Q' keine weiteren Elemente.
- $\mathsf{F}' := \{S \in \mathsf{Q}' \mid S \cap \mathsf{F} \neq \emptyset\}$.

Determinisieren Sie mithilfe **dieser** Konstruktion den ε-NFA aus Aufgabenteil (a), um einen DFA mit gleicher Sprache zu erhalten.

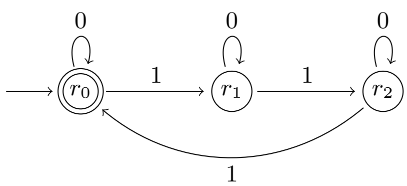
AUFGABE 3.4. Stufe C

Gegeben seien zwei DFAs D_1 und D_2 über dem gleichen Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung um einen DFA D anzugeben, so dass $\mathsf{L}(\mathsf{D}) = \mathsf{L}(\mathsf{D}_1) \cap \mathsf{L}(\mathsf{D}_2)$.

D_1 :



D_2 :



Definition (Suffix-Sprache)

Sei $\mathsf{L} \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über dem Alphabet Σ. Wir definieren $\mathsf{L}_{\mathsf{sf}} := \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*.\ uv \in \mathsf{L}\}$ und bezeichnen L_{sf} als *die Sprache der Suffixe* von L.

AUFGABE 3.5. Stufe D

Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$. Wir zeigen nun, dass wenn L regulär ist, dann ist auch L_{sf} regulär.

(a) Geben Sie die Sprache der Suffixe für $\mathsf{L} = \{\mathsf{abc}, \mathsf{d}\}$ an.

(b) Sei L regulär. Beweisen Sie, dass auch L_{sf} regulär ist, indem Sie aus einem NFA $\mathsf{N} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, \mathsf{q}_0, \mathsf{F})$ mit $\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{N})$ einen ε-NFA N' mit $\mathsf{L}_{\mathsf{sf}} = \mathsf{L}(\mathsf{N}')$ angeben.

(c) Geben Sie direkt, d.h. ohne den Umweg über NFAs einen regulären Ausdruck r mit $\mathsf{L}(r) = \mathsf{L}((\mathsf{ab} \mid \mathsf{b})^*\mathsf{cd})_{\mathsf{sf}}$ an.

(d) Beschreiben Sie eine rekursive Prozedur, die einen gegebenen regulären Ausdruck r direkt in einen regulären Ausdruck r' mit $\mathsf{L}(r') = \mathsf{L}(r)_{\mathsf{sf}}$ umschreibt.

AUFGABE 3.6. Stufe D

Sei Σ ein endliches Alphabet. Ein *sternfreier* Ausdruck ist wie folgt definiert:

- *Syntax:* Die Grammatik mit folgender Produktion gibt die Menge aller gültigen sternfreien Ausdrücke an:
  $$\mathsf{S} \to \emptyset \mid \varepsilon \mid x \mid \mathsf{SS} \mid \overline{\mathsf{S}} \mid \mathsf{S}|\mathsf{S} \qquad x \in \Sigma$$
  Wir bezeichnen mit | Vereinigung, mit SS Konkatenation und mit $\overline{\mathsf{S}}$ Komplement.
- *Semantik*
  $$\mathsf{L}(\emptyset) := \emptyset \quad \mathsf{L}(\varepsilon) := \{\varepsilon\} \quad \mathsf{L}(\mathsf{a}) := \{\mathsf{a}\} \quad \mathsf{L}(\alpha\beta) := \mathsf{L}(\alpha)\mathsf{L}(\beta) \quad \mathsf{L}(\overline{\alpha}) := \Sigma^* \setminus \mathsf{L}(\alpha) \quad \mathsf{L}(\alpha|\beta) := \mathsf{L}(\alpha) \cup \mathsf{L}(\beta)$$

(a) Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass $\mathsf{L}(\alpha)$ eine reguläre Sprache über Σ ist, falls α ein sternfreier Ausdruck über Σ ist. Passen Sie hierfür den Beweis aus den Folien, dass jeder reguläre Ausdruck sich in einen NFA übersetzen lässt, entsprechend an.

Hinweise:

- Die Umkehrung von (a) gilt nicht, z.B. ist $\mathsf{L}((\mathsf{aa})^*)$ eine reguläre Sprache über $\Sigma = \{\mathsf{a}\}$, welche sich nicht durch einen sternfreien Ausdruck beschreiben lässt.
- Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage verwenden: Ist $\mathsf{D} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, \mathsf{q}_0, \mathsf{F})$ ein DFA, so akzeptiert der DFA $\mathsf{D}' = (\mathsf{Q}', \Sigma', \delta', \mathsf{q}_0', \mathsf{F}')$, wobei $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}'$, $\Sigma = \Sigma'$, $\mathsf{q}_0 = \mathsf{q}_0'$, $\delta = \delta'$ und $\mathsf{F}' = \mathsf{Q} \setminus \mathsf{F}$ gerade die Sprache $\mathsf{L}(\mathsf{D}') = \Sigma^* \setminus \mathsf{L}(\mathsf{D})$.
- (a) impliziert, dass es für jeden sternfreien Ausdruck α einen regulären Ausdruck α' mit $\mathsf{L}(\alpha) = \mathsf{L}(\alpha')$ gibt.

(b) Beweisen Sie die Behauptung $\mathsf{L}(\varepsilon|\overline{\overline{\mathsf{a}\overline{\emptyset}}|\overline{\overline{\emptyset}\mathsf{b}}|\overline{\emptyset}\mathsf{aa}\overline{\emptyset}|\overline{\emptyset}\mathsf{bb}\overline{\emptyset}}) = \mathsf{L}\big((\mathsf{ab})^*\big)$ für $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, indem Sie

(i) zuerst den sternfreien Ausdruck in einen ε-NFA übersetzen,

(ii) den ε-NFA gemäß der Vorlesung über Zwischenschritte in einen regulären Ausdruck übertragen und

(iii) schließlich den erhaltenen regulären Ausdruck mittels der Äquivalenzen aus der Vorlesung zu $(\mathsf{ab})^*$ vereinfachen.

Hinweis: Vereinfachen Sie den NFA zunächst vor der Übersetzung in einen regulären Ausdruck, indem Sie alle Zustände, die keinen Endzustand erreichen können, entfernen. Erklären Sie kurz, warum sich die erkannte Sprache dadurch nicht ändert.

AUFGABE 3.7.

Stufe E

Wir betrachten das duale Model zu NFAs und definieren für diese Aufgabe *UFA*s (universelle endliche Automaten), die ein Wort w akzeptieren gdw. alle Läufe auf w in einem Endzustand enden. Sei $\mathsf{U} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, \mathsf{q}_0, \mathsf{F})$ ein UFA. Dann wird das Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann akzeptiert, wenn $\delta(\mathsf{q}_0, w) \subseteq \mathsf{F}$.

(a) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage gilt und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen passenden Beweis oder ein passendes Gegenbeispiel angeben:

Jeder UFA ohne Endzustände akzeptiert die leere Sprache.

(b) Wir betrachten folgende Sprache $\mathsf{L}_k = \{w \in \Sigma^* \mid \forall i \in \mathbb{N}_0.\ w_i = a \rightarrow w_{i+k} = b\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Konstruieren Sie einen NFA und einen UFA für $k = 2$. Vergleichen Sie Ihre beiden Lösung bezüglich der Größe der Automaten.

(c) Geben Sie eine Übersetzung von UFAs zu DFAs an und beweisen Sie deren Korrektheit.