Prof. J. Esparza
S. Sickert, J. Krämer

Technische Universität München
KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2017 – Übungsblatt 1

Übungsblatt

Wir unterscheiden zwischen Übungs- und Abgabeblättern. Auf diesem *Übungsblatt* finden Sie eine Übersicht über die Kernaspekte, die Sie in Kalenderwoche 18 in den Tutorien diskutieren, üben und vertiefen. Die Aufgaben auf diesem Blatt dienen dem Üben und Verstehen des Vorlesungsstoffes, sowie dem *eigenständigen Erarbeiten* der Kernaspekte. Außerdem sollen Ihnen diese Aufgaben auch helfen, ein Gefühl dafür zu bekommen, was Sie inhaltlich in der Klausur erwartet. Klausuraufgaben können jedoch deutlich von den hier gestellten Aufgaben abweichen. Abschreiben und Auswendiglernen von Lösungen wird Ihnen daher keinen dauerhaften Erfolg in der Vorlesung bringen. Fragen zu den Übungsblättern können Sie montags bis donnerstags von 12 Uhr bis 14 Uhr in der *THEO-Sprechstunde* in Raum 03.11.034 stellen.

Kernaspekte

K1.1 korrektes Wiedergeben der folgenden Definitionen

- Alphabet Σ
- Wort w
- Konkatenation von Wörtern
- Länge eines Wortes
- formale Sprache
- Operationen auf Sprachen (Def. 2.3)
- reflexive transitive Hülle
- reguläre Sprache
- kontextfreie Sprache
- kontextsensitive Sprache
- Sprachen vom Typ-0
- rechtslineare Grammatik
- kontextfreie Grammatik
- kontextsensitive Grammatik
- Grammatiken vom Typ-0

K1.2 Sprachen mithilfe von Operationen verknüpfen
K1.3 Wörter einer Sprache angeben
K1.4 begründen und beweisen, dass eine Grammatik ein Wort (nicht) erzeugt
K1.5 begründen und beweisen, dass eine Grammatik eine Sprache (nicht) erzeugt
K1.6 Aussagen über Verknüpfungen von Sprachen beweisen
K1.7 begründet entscheiden, ob gegebene Beispiele neu eingeführte Definitionen erfüllen
K1.8 Aussagen, mit neu eingeführten Definitionen beweisen oder widerlegen

AUFGABE 1.1.

Stufe B

Gegeben seien folgende drei Grammatiken $G_1 = (\{S, X\}, \Sigma, P_1, S)$, $G_2 = (\{S, X\}, \Sigma, P_2, S)$ und $G_3 = (\{S, S', A, B, C\}, \Sigma, P_3, S)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit folgende Produktionen:

$$\begin{array}{ll} P_1: & S \to a\,X \qquad X \to b\,S \mid b \\ P_2: & S \to a\,S\,b \mid S\,X \mid \varepsilon \qquad X \to c\,X \\ P_3: & S \to S' \mid \varepsilon \qquad S' \to ABC \mid ABC\,S' \\ & A \to a \qquad B \to b \qquad C \to c \qquad CB \to BC \qquad CA \to AC \qquad BA \to AB \end{array}$$

Begründen Sie, warum die folgenden Wörter von den gegebenen Grammatiken erzeugt bzw. nicht erzeugt werden.

(a) $w_1 = abab \in L(G_1)$, $w_2 = ba \notin L(G_1)$, $w_3 = \varepsilon \notin L(G_1)$
(b) $u_1 = aabb \in L(G_2)$, $u_2 = aabbcc \notin L(G_2)$
(c) $v_1 = aabbcc \in L(G_3)$, $v_2 = aaabbc \notin L(G_3)$

AUFGABE 1.2.
Stufe B

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $W = \{aa, aaa, b\}$. Geben Sie, wenn möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

(a) $A = \{w \mid w \in W^2 \wedge w \in W^3\}$
(b) $B = \{w \in W^* \mid |w| = 3\}$
(c) $C = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \exists v \in W. w = uv\}$
(d) $D = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. uw = w^2 u\}$
(e) $E = \{(ba^n b)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
(f) $F = \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0. |w|_a = n \cdot |w|_b\}$

Hinweise:
- Mit $|w|_a$ bezeichnen wir die Anzahl der as in w.

AUFGABE 1.3.
Stufe B

Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{\varepsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$. Wir betrachten nun verschiedene Verknüpfungen. Geben Sie für endliche Mengen alle Elemente und für unendliche drei Beispiele an:

(a) AB
(b) A^2
(c) B^0
(d) $A\emptyset$
(e) $A \times (\emptyset^*)$
(f) $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(g) $\overline{B} := \Sigma^* \setminus B$

AUFGABE 1.4.
Stufe C / D

Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen eine passende Grammatik G, so dass $L(G)$ genau die Sprache ist.
(a) $A = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \mod 2 = 0\}$
(b) $B = \{w \in \{0, 1\}^+ \mid w \mod 2 = 0\}$, wobei w eine Binärzahl mit most-significant-bit-first Encoding darstellt
(c) $C = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
(d) $D = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
(e) $E = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$

Hinweise:
- Wir bezeichnen mit w^R die Spiegelung von w, d.h. $(abb)^R = bba$, $\varepsilon^R = \varepsilon$.
- Eine mögliche Lösung von Aufgabenteil (d) erweitert die Grammatik von Aufgabenteil (c) passend.
- Für Aufgabe (e) ist `https://math.stackexchange.com/questions/136237/` hilfreich.
- *Achtung*: Aufgabenteile (d) und (e) sind deutlich anspruchsvoller. Es macht daher nichts, wenn Sie die Aufgaben erst in ein paar Wochen lösen können!

AUFGABE 1.5.
Stufe D

Sei Σ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ beliebig. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie für korrekte Aussagen einen Beweis an oder widerlegen Sie falsche mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels.
(a) $A^* = A^+$ gdw. $\varepsilon \in A$
(b) $A(B \cap C) = AB \cap AC$
(c) Falls $A \subseteq B$, dann $A^n \subseteq B^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.
(d) Unter der Annahme $A \neq \emptyset$ gilt: $A = AA$ gdw. $A = A^*$.

AUFGABE 1.6.
Stufe D

Sei $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2\,|w|_b\}$ und seien folgende drei Grammatiken gegeben:
(a) $S \to \varepsilon \mid S\,S \mid aab \mid aba \mid baa$
(b) $S \to \varepsilon \mid S\,S \mid a\,S\,a\,S\,b \mid a\,S\,b\,S\,a \mid b\,S\,a\,S\,a$
(c) $S \to \varepsilon \mid S\,a\,X \mid X\,a\,S \qquad X \to S\,a\,S\,b\,S \mid S\,b\,S\,a\,S \mid X\,X$

Entscheiden Sie, ob für die jeweils angegebenen Grammatiken $L(G) = L$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder ein Gegenbeispiel angeben oder die Äquivalenz mit vollständiger Induktion beweisen.

AUFGABE 1.7.
Stufe E

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *linear*, falls es eine kontextfreie Grammatik G gibt, so dass auf der rechten Seite einer jeden Produktion höchstens ein Nichtterminal steht (d.h. $P \subseteq V \times (\Sigma^* V \Sigma^* \cup \Sigma^*)$). Die folgende Aussage gilt:

Ist L linear mit $\varepsilon \notin L$, dann gibt es eine CFG G, so dass $L = L(G)$ und für jede Produktion $X \to \gamma$ gilt: $\gamma \in \Sigma V \cup V \Sigma \cup \Sigma$.

(a) Vergewissern Sie sich zunächst, dass die Aussage korrekt ist, indem Sie die Grammatik G in eine Form bringen, so dass für jede Produktion $X \to \gamma$ die Bedingung $\gamma \in \Sigma V \cup V \Sigma \cup \Sigma$ gilt.

$$S \to c\,S\,c \mid aa\,X\,bb \qquad X \to c \mid S$$

(b) Beweisen Sie nun die obige Aussage.