Prof. Dr. Javier Esparza Garching b. München, den 10.08.17

Klausur

Einführung in die theoretische Informatik

Sommer-Semester 2017

Beachten Sie:

- Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!
- Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben auf 2 Seiten. Insgesamt können Sie 40 Punkte erreichen.
- $|w|_{\mathsf{a}}$ für $w \in \Sigma^*$ und $\mathsf{a} \in \Sigma$ bezeichnet die Anzahl der as in w, z.B. $|\mathsf{aabab}|_{\mathsf{a}} = 3$.
- Nichtbeachtung der aufgabenspezifischen Hinweise kann zu Punktabzug führen.

Viel Erfolg !

Aufgabe 1 (Quiz zu Regulären und Kontextfreien Sprachen) (5 Punkte)

Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils korrekt oder inkorrekt sind. Falls die Aussage korrekt ist, beziehen Sie sich dazu auf die entsprechenden Ergebnisse aus der Vorlesung. Falls die Aussage inkorrekt ist, geben Sie bitte ein passendes Gegenbeispiel an.

(a) Seien A und B nicht-reguläre Sprachen. Dann ist $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ nicht regulär.

(b) Seien A eine reguläre, nicht-leere und B eine nicht-reguläre Sprache. Dann ist AB nicht regulär.

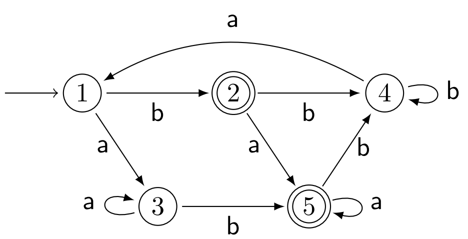
(c) Sei $\mathsf{A} \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Dann gibt es mindestens eine Myhill-Nerode-Äquivalenzklasse K bezüglich $\equiv_{\mathsf{A}}$ mit $|K| = \infty$.

(d) Es gibt keinen minimalen DFA $\mathsf{D} = (\mathsf{Q}, \Sigma, \delta, \mathsf{q}_0, \mathsf{F})$ mit $|\mathsf{Q}| = 2$ und $|\mathsf{F}| = 0$.

(e) Für jeden PDA P gibt es einen PDA P' mit $\mathsf{L}_\varepsilon(\mathsf{P}) \setminus \{\varepsilon\} = \mathsf{L}_\varepsilon(\mathsf{P}')$, der keine $\boldsymbol{\varepsilon}$-Transitionen besitzt.

Aufgabe 2 (Minimierung) (7 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden DFA D über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$:



(a) Minimieren Sie den DFA D. Geben Sie außerdem die Tabelle der kürzesten unterscheidenden Wörter an, die Sie zur Minimierung des Automaten verwenden.

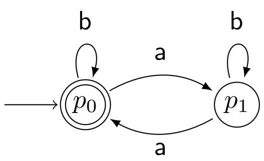
(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen der Sprache $\mathsf{L}(\mathsf{D})$.

(c) Geben Sie zu jeder Klasse einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter der Klasse beschreibt. Eine Begründung hierfür ist nicht notwendig.

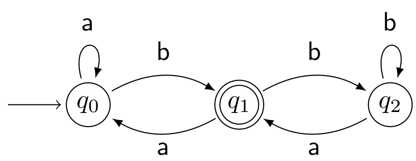
Aufgabe 3 (Sprachdifferenz) (3 Punkte)

Konstruieren Sie unter Verwendung der Produktkonstruktion einen DFA D_3 mit $\mathsf{L}(\mathsf{D}_3) = \mathsf{L}(\mathsf{D}_1) \setminus \mathsf{L}(\mathsf{D}_2)$.

D_1:



D_2:



Hinweis: Beschriften Sie die Zustände mit Paaren von Zuständen von D_1 und D_2.

Aufgabe 4 (Reguläre Sprachen) (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und RE die Menge aller regulären Ausdrücke über Σ.

(a) Geben Sie eine rekursive Prozedur $f \colon \mathsf{RE} \to \mathbb{B}$ an, so dass $f(r) \Leftrightarrow \varepsilon \in \mathsf{L}(r)$.

(b) Sei $\mathsf{L} \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über dem Alphabet Σ. Für jedes $x \in \Sigma$ definieren wir $\mathsf{L}_x \subseteq \Sigma^*$ als:

$$\mathsf{L}_x := \{w \in \Sigma^* \mid wx \in \mathsf{L}\}$$

Beispiel: Sei $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ und $\mathsf{L} = \{\mathsf{acb}, \mathsf{bbc}, \mathsf{b}, \mathsf{ba}\}$. Dann ist $\mathsf{L}_\mathsf{b} = \{\varepsilon, \mathsf{ac}\}$.

Geben Sie eine rekursive Prozedur $g\colon \Sigma \times \mathsf{RE} \to \mathsf{RE}$ an, so dass $\mathsf{L}(g(x,r)) = \mathsf{L}(r)_x$ für jeden regulären Ausdruck r und jedes $x \in \Sigma$.

Hinweis: Für die Definition von g dürfen Sie f verwenden.

Aufgabe 5 (Kontextfreie Sprachen) (5 Punkte)

Betrachten Sie die Sprache $\mathsf{L} = \{\mathsf{a}^i\mathsf{b}^j\mathsf{c}^k \mid i = j + 2k \wedge i,j,k \geq 0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$.

(a) Konstruieren Sie einen DPDA P mit $\mathsf{L} = \mathsf{L}_F(\mathsf{P})$, d.h. P akzeptiert L mit Endzuständen.

(b) Konstruieren Sie eine CFG G mit $\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{G})$.

Hinweise:

- Achten Sie darauf, dass Ihr PDA P deterministisch ist und geben Sie δ des DPDAs graphisch an.
- Verwenden Sie für den DPDA P maximal 2 Stacksymbole und 8 Zustände. Beachten Sie, dass unsere Lösung weniger Zustände verwendet.
- Verwenden Sie für G maximal 3 Variablen und maximal 5 Produktionen. Beachten Sie, dass unsere Lösung weniger Variablen und Produktionen verwendet.
- *Achtung:* Stellen Sie sicher, dass Ihr DPDA bzw. Ihre Grammatik folgende Wörter erkennt $\varepsilon, \mathsf{ab}, \mathsf{aac}, \mathsf{aaabc}$ und folgende Wörter nicht erkennt $\mathsf{a}, \mathsf{abc}, \mathsf{caa}$. Sonst wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 6 (Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen) (5 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass $\mathsf{L} = \{\mathsf{a}^i\mathsf{b}^j\mathsf{c}^k \mid i = j \cdot k \wedge i,j,k \geq 0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 7 (Quiz zu Entscheidbarkeit) (5 Punkte)

Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils korrekt oder inkorrekt sind. Falls die Aussage korrekt ist, beziehen Sie sich dazu auf die entsprechenden Ergebnisse aus der Vorlesung. Falls die Aussage inkorrekt ist, geben Sie bitte ein passendes Gegenbeispiel an.

(a) Für jede entscheidbare Menge $\mathsf{A} \subseteq \{0,1\}^*$ gibt es eine TM, mit mehr als 314 Zuständen, die χ_A berechnet.

(b) Seien A und B Sprachen. Ist $\mathsf{A} \leq \mathsf{B}$ und A entscheidbar, dann ist auch B entscheidbar.

(c) Rekursiv aufzählbare Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen.

(d) Sei $(\mathsf{L}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie entscheidbarer Sprachen, d.h. jedes L_i ist entscheidbar. Dann ist auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{L}_i$ entscheidbar.

(e) Es gibt keine berechenbare Funktion $f\colon \mathsf{CFG} \times \mathsf{CFG} \to \mathbb{N}_0$, die im Fall $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \not\subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$ die Länge eines kürzesten unterscheidenden Wortes $w \in \mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \setminus \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$ zurückgibt: $f(\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2) = |w|$. Falls $\mathsf{L}(\mathsf{G}_1) \subseteq \mathsf{L}(\mathsf{G}_2)$ gilt, kann f auf einen beliebigen Wert abbilden.

Aufgabe 8 (Reduktionen) (5 Punkte)

Mit DOUBLE-SAT bezeichnen wir im Folgenden das Problem, gegeben eine aussagenlogische Formel zu entscheiden, ob sie mindestens *zwei* erfüllbare Belegungen hat.

Formal: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller aussagenlogischen Formeln über einer unendlichen Menge $\mathcal{V}$ von Variablen. Sei $\sigma\colon \mathcal{V} \to \{0,1\}$ eine Belegung. Wie üblich wird σ konsistent mit der Semantik der Aussagenlogik auf $\mathcal{F} \to \{0,1\}$ erweitert. Dann können wir die zwei Mengen SAT und DOUBLE-SAT definieren:

$$\begin{aligned}\mathsf{SAT} &:= \{F \in \mathcal{F} \mid \exists \sigma\colon \mathcal{V} \to \{0,1\}.\ \sigma(F) = 1\}\\ \mathsf{DOUBLE\text{-}SAT} &:= \{F \in \mathcal{F} \mid \exists \sigma, \sigma'\colon \mathcal{V} \to \{0,1\}.\ \sigma(F) = 1 = \sigma'(F)\\ &\qquad \wedge \sigma(x) \neq \sigma'(x) \text{ für eine Variable } x \text{, die in } F \text{ vorkommt.}\}\end{aligned}$$

Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen, indem Sie passende Reduktionen angeben und deren Korrektheit begründen. Geben Sie auch an, welche Reduktion zeigt, dass DOUBLE-SAT in NP liegt, und welche zeigt, dass DOUBLE-SAT NP-schwer (NP-hart) ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) DOUBLE-SAT $\leq_p$ SAT

(b) SAT $\leq_p$ DOUBLE-SAT