Einführung in die theoretische Informatik – Aufgabenblatt 12

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 20.07.2016 (Mittwoch) um 12:00

Aufgabe 12.1 PCP **1P+1P+2P+3P**

(a) Bestimmen Sie *alle* Lösungen für das folgende PCP: $P_1 = ((d, cd), (d, d), (abc, ab))$.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Instanz des PCPs keine Lösung hat: $P_2 = ((ab, aba), (baa, aa), (aba, baa))$.

(c) Zeigen Sie, dass das Post'sche Korrespondenzproblem über einem Alphabet mit nur einem Symbol entscheidbar ist. Geben Sie hierzu einen Algorithmus an und begründen Sie dessen Korrektheit.

(d) Sei $P = (c_1, c_2)$ ein PCP über einem beliebigem Alphabet Σ mit $c_i = (x_i, y_i)$ und $||x_i| - |y_i|| = 1$ für $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie die Entscheidbarkeit für diese Variante des PCPs. Geben Sie hierzu einen Algorithmus an und begründen Sie dessen Korrektheit.

Aufgabe 12.2 Entscheidbarkeit und kontextfreie Grammatiken **3P+3P**

Seien G_1, G_2 CFGs.

(a) Zeigen Sie, dass das Problem $L(G_1) \nsubseteq L(G_2)$ semi-entscheidbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Problem $L(G_1) \subseteq L(G_2)$ unentscheidbar ist.

Hinweis: In der Vorlesung wurde das Resultat nur erwähnt, zeigen Sie das Resultat jetzt formal. Sie dürfen verwenden, dass für G_1, G_2 CFGs das Problem $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ unentscheidbar ist. Schauen Sie sich den entsprechenden Beweis in den Folien an. Charakterisieren Sie die dort verwendeten CFGs möglichst genau (linear, rechtslinear, linkslinear, deterministisch?).

Aufgabe 12.3 ITE-SAT **3P**

Wir betrachten (mal wieder) den ITE-Operator für boolesche Ausdrücke:

Zur Erinnerung, die Semantik ist durch $\mathsf{ITE}(x, y, z) := (x \to y) \wedge (\neg x \to z)$ definiert. Eine ITE-Formel genügt der folgenden Grammatik in BNF:

$$F ::= \mathsf{ITE}(F, F, F) \mid x_i \mid \mathsf{true} \mid \mathsf{false}$$

Eine ITE-Formel wird mittels des ITE-Operators aus den aussagenlogischen Variablen $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und den konstanten Wahrheitsfunktion true und false gebildet.

Zeigen Sie, dass ITE-SAT, d.h. das Problem zu entscheiden, ob eine gegeben ITE-Formel erfüllbar ist, **NP**-vollständig ist.

Aufgabe 12.4 Meterstab-Problem **3P**

Zeigen Sie, dass das Meterstab-Problem NP-vollständig ist.

Gegeben: Ein Meterstab mit Gliedern unterschiedlicher Länge $l_1, \dots l_n \in \mathbb{N}$ und eine Taschenlänge $l \in \mathbb{N}$.

Problem: Läßt sich der Meterstab einpacken? Formal: Lässt er sich zu einer Länge $\leq l$ zusammenfalten?

Hinweis: Reduzieren Sie PARTITION auf das Meterstab-Problem. Zeigen Sie dafür, dass eine Eingabe $a_1, \dots, a_n$ von Partition eine positive Lösung genau dann hat, wenn sich der Meterstab mit den Gliedern der Länge A, $A/2$, a_1, …, a_n, $A/2$, A auf die Länge A falten lässt, wobei $A := \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Aufgabe 12.5 **Satz von Rice** **3P**

Sind folgende Menge unentscheidbar ($\Sigma = \{0, 1\}$)? Wenn möglich, verwenden Sie bitte den Satz von Rice. Dabei geben Sie bitte die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren, warum die Menge nicht trivial ist.

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid L(M_w) \text{ ist regulär}\}$
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ \varphi_w(n) = n * (n - 23) + 42\}$
- $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall p \in \mathbb{N}.\ (|w| < p \wedge p \text{ ist prim}) \rightarrow w_p = 0\}$

Aufgabe 12.6 **2P**

Wir nehmen an, dass P ein (WHILE-)Programm ist, das SAT in polynomieller Zeit entscheidet.

Konstruieren Sie unter Verwendung von P als Hilfsfunktion ein Programm P', das in polynomieller Zeit zu einer gegebenen aussagenlogischen Formel ϕ eine erfüllende Belegung β berechnet.

Aufgabe 12.7 **Semi-Entscheidbarkeit** **2P**

Zeigen Sie:

$$A \text{ ist semi-entscheidbar gdw. } A \text{ ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion}$$

Tutoraufgaben: Besprechung in KW28

Aufgabe 12.1 Entscheidbarkeit

Geben Sie für jedes der folgenden Probleme an, ob es entscheidbar oder unentscheidbar ist. Falls es unentscheidbar ist, geben Sie an, ob das Problem selbst oder sein Komplement semi-entscheidbar ist. Begründen Sie stets Ihre Antwort.

Gegeben sei eine (1-Band-)Turing-Maschine M:

(a) Hält M auf der leeren Eingabe?

(b) Gibt es eine Eingabe, auf der M hält?

(c) Schreibt M jemals ein gegebenes x (bezogen auf alle möglichen Eingaben)?

(d) Ändert M jemals ein Zeichen auf dem Band bei leerer Eingabe?

(e) Gilt $L(M) = \{0,1\}^*$? ($L(M)$ ist die von M akzeptierte Sprache, d.h. M hat eine akzeptierende Berechnung für jedes $w \in L(M)$. OBdA gilt $L(M) \subseteq \{0,1\}^*$.)

Aufgabe 12.2 Reduktionen und NP-Vollständigkeit

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass 3KNF-SAT (und damit KNF-SAT) **NP**-vollständig ist. Man kann zeigen, dass 2KNF-SAT (maximal 2 Literale pro Klausel) allerdings noch in **P** liegt. Ist eine Formel in KNF unerfüllbar, so kann man immer noch versuchen, die Anzahl der gleichzeitig erfüllten Klausel zu maximieren. Das entsprechende Problem wird mit MAX-KNF-SAT bezeichnet. Speziell ist **MAX-2KNF-SAT** das Entscheidungsproblem:

- Gegeben: Aussagenlogische Formel ϕ in 2KNF, Konstante $c \in \mathbb{N}$.
- Frage: Gibt es eine Belegung β, so dass *mindestens* c Klauseln von ϕ unter β erfüllt sind.

Ziel ist es zu zeigen, dass MAX-2KNF-SAT bereits **NP**-vollständig ist.

(a) Zeigen Sie, dass MAX-2KNF-SAT in **NP** liegt.

(b) Betrachten Sie die folgenden zehn Klauseln:

$$K_1 = x \qquad K_2 = y \qquad K_3 = z \qquad K_4 = w$$

$$K_5 = \neg x \vee \neg y \qquad K_6 = \neg y \vee \neg z \qquad K_7 = \neg z \vee \neg x \qquad K_8 = x \vee \neg w \qquad K_9 = y \vee \neg w \qquad K_{10} = z \vee \neg w$$

Zeigen Sie:

(i) Ist β' eine erfüllende Belegung von $x \vee y \vee z$, so lässt sich β' zu einer zu $K_1 \wedge \ldots \wedge K_{10}$ passenden Belegung β erweitern, welche maximal sieben Klauseln erfüllt.

(ii) Die Belegung $\beta' \colon \{x,y,z\} \to \{0,1\} \colon v \mapsto 0$ lässt sich nicht zu einer Belegung β erweitern, unter der mehr als sechs der zehn gegebenen Klauseln erfüllt sind.

(c) Sei $C = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ eine dreielementige Klausel. Die Formel R_C sei wie folgt definiert:

$$R_C := \bigwedge_{i=1}^{10} K_i[x \mapsto L_1, y \mapsto L_2, z \mapsto L_3, w \mapsto x_C]$$

wobei $K_i[x \mapsto L_1, y \mapsto L_2, z \mapsto L_3, w \mapsto x_C]$ die Klausel ist, welche man aus K_i erhält, indem man x durch L_1, y durch L_2, z durch L_3 und w durch x_C (parallel) substituiert. x_C ist dabei eine neue, zuvor noch nicht verwendete Variable.

Zeigen Sie: Sei $\phi = \bigwedge_{i=1}^{k} C_i$ in 3KNF und $R_\phi := \bigwedge_{i=1}^{k} R_{C_i}$. Dann gilt $(R_\phi, 7k) \in$ MAX-2KNF-SAT gdw. $\phi \in$ 3KNF-SAT.

(d) Vervollständigen Sie den Beweis, dass MAX-2KNF-SAT **NP**-hart ist.

(e) Nehmen Sie an, MAX-2KNF-SAT liegt in **P**.

Zeigen Sie, dass dann auch die Probleme, zu einer gegebenen 2KNF-Formel ϕ (i) die maximal erfüllbare Anzahl an Klauseln bzw. (ii) eine Belegung, welche eine maximale Anzahl von Klauseln erfüllt, zu berechnen, in **P** liegen.

Aufgabe 12.3 Entscheidbarkeit

Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ein endliches Alphabet. Seien $f, g \colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ zwei Homomorphismen, d.h. $f(\varepsilon) = \varepsilon$ und $f(uv) = f(u)f(v)$ für alle $u, v \in \Sigma^*$ und entsprechend für g. f, g seien durch Auflistung Ihrer Bilder auf Σ gegeben: $(f(a_i))_{i \in [k]}, (g(a_i))_{i \in [k]}$.

Zeigen Sie:

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Es ist unentscheidbar, ob es ein Wort $w \in L$ mit $f(w) = g(w)$ gibt.

Hinweis: Verwenden Sie eine Reduktion von PCP.

(b) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Es ist entscheidbar, ob $f(w) = g(w)$ für alle $w \in L$ gilt.

Hinweis: Untersuchen Sie die Struktur des DFAs.