

Einführung in die theoretische Informatik – Aufgabenblatt 9

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum **22.06.2016** (Mittwoch) um 12:00

Aufgabe 9.1 **Quiz** **1P+1P+1P+1P**

Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie eine kurze Begründung an:

- (a) Gibt es eine Turingmaschine, die den Kopf nie weiter als vier Schritte von der Startposition weg bewegt und eine unendliche Sprache akzeptiert?
- (b) Welche Sprachen lassen sich mit Turingmaschinen, die ihren Kopf immer nur nach rechts bewegen, erkennen?
- (c) Welche Sprachen lassen sich mit Turingmaschinen, die ihren Kopf immer nur nach links bewegen, erkennen?
- (d) Kann jede Turingmaschine in eine Turingmaschine, die die gleiche Sprache erkennt und nur einen Zustand hat, übersetzt werden?

Aufgabe 9.2 **Produktkonstruktion für Kellerautomaten** **3P**

Geben Sie eine direkte Konstruktion an, um aus einem PDA A und einem NFA N einen PDA A' mit $L_\varepsilon(A') = L_\varepsilon(A) \cap L(N)$ zu konstruieren. Verwenden Sie hierfür *nicht* den Umweg über kontextfreie Grammatiken.

Aufgabe 9.3 **PDA's mit beschränktem Stack** **3P**

Zeigen Sie: Ist A ein PDA und $c \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante, so dass es zu jedem $w \in L_\varepsilon(A)$ einen akzeptierenden Ablauf gibt, bei dem maximal c Symbol auf dem Stack liegen, dann ist $L_\varepsilon(A)$ regulär.

Aufgabe 9.4 **La-Ola-Wellen (Euro 2016)** **3P**

Wir konstruieren eine TM, die La-Ola-Wellen simuliert. Geben Sie hierzu eine deterministische TM an, welche als Eingabe ein Wort $w \in \{u, m, o\}^*$ mit $|w| \geq 3$ erwartet, wobei $w = a_0 \dots a_{l-1}$ den aktuellen Zustand einer La-Ola-Welle beschreibt, wobei sich die Welle bei a_{l-1} wieder bei a_0 fortsetzen sollen (mod l). Die Buchstaben von w beschreiben die aktuelle Armhaltung (**u**nten, **m**ittig, **o**ben) des Zuschauers auf Platz i .

Die DTM soll zuerst prüfen, dass w eine zulässige La-Ola-Welle ist, d.h.

$$\forall i \in \mathbb{Z}_l: \quad \wedge \quad \begin{aligned} & (a_i = o \rightarrow a_{i-1 \bmod l} a_i a_{i+1 \bmod l} \in L((o|m)o(o|m))) \\ & (a_i = u \rightarrow a_{i-1 \bmod l} a_i a_{i+1 \bmod l} \in L((u|m)u(u|m))) \\ & (a_i = m \rightarrow a_{i-1 \bmod l} a_i a_{i+1 \bmod l} \in L(umo|omu)) \end{aligned}$$

und anschließend die Welle um eine Position nach links verschieben, d.h. falls w zulässig ist, soll die DTM mit der Ausgabe $\triangleright a_1 \dots a_{l-1} a_0 \triangleleft$ terminieren. Falls die Eingabe jedoch nicht zulässig ist, soll die DTM mit leerem Band terminieren.

Tutoraufgaben: Besprechung in KW25

Aufgabe 9.1 Turing Maschinen

Geben Sie für jede der angegebenen Sprachen eine TM an, welche diese entscheidet:

$$L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \quad L_2 = \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

Aufgabe 9.2 NFA, PDA \rightarrow TM

Beschreiben Sie allgemein, wie man die Beschreibung $N = (Q_N, \Sigma_N, \delta_N, q_N, F_N)$ eines NFA bzw. eines PDA $P = (Q_P, \Sigma_P, \Gamma_P, \delta_P, q_P, Z_P)$ in die Beschreibung M einer TM überführt, so dass T gerade $L(N)$ bzw. $L_\varepsilon(P)$ entscheidet. Verwenden Sie bei Bedarf eine TM mit mehreren Bändern.

Aufgabe 9.3 k-PDA

Ein k -PDA ist ein PDA, der k Stacks zur Verfügung hat. In jedem Schritt, kann der PDA in Abhängigkeit vom aktuellen Zustand, dem gelesenen Eingabezeichen und den Symbolen, die zu oberst auf jedem der k Stacks liegen, in einen neuen Zustand wechseln und jeden der k Stacks wie im Fall eines gewöhnlichen PDAs modifizieren. Offensichtlich ist jeder k -PDA auch ein $k+1$ -PDA.

Zeigen bzw. argumentieren Sie:

- 0-PDA und NFA akzeptieren dieselben Sprachen.
- Es gibt eine Sprache, die von einem 2-PDA, aber von keinem 1-PDA akzeptiert wird.
- Für jeden k -PDA ($k \geq 3$) gibt es einen 2-PDA, der dieselbe Sprache akzeptiert, d.h. mehrere Stacks können immer durch genau zwei Stacks simuliert werden.