Einführung in die theoretische Informatik – Aufgabenblatt 7

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 08.06.2016 (Mittwoch) um 12:00

Aufgabe 7.1 Kontextfreie Sprachen 3P

Sei $L = \{w \in \Sigma^* \colon |w|_a = 2\,|w|_b\}$. Geben Sie eine CFG G über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ mit $L(G) = L$ an und zeigen Sie die Korrektheit mittels Induktion.

Aufgabe 7.2 Pumping Lemma 3P

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache $L = \{a^i b^{2^i} \mid i \geq 0\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 7.3 CNF Blow-Up 1P + 3P

(a) Geben Sie ein eine Familie von Grammatiken G_n der Größe $\mathcal{O}(n)$ an, so dass eine Übersetzung in eine Grammatik G'_n in CNF **entsprechend den Folien** exponentiell größer ist ($\mathcal{O}(2^n)$) und begründen Sie, warum es dieses Wachstum gibt.

(b) Zeigen Sie: Überführt man eine CFG G in CNF, indem man die Schritte der Folien umordnet nach (3), (4), (1), (2), dann ist die erzeugte Grammatik G' ebenfalls in CNF, jedoch höchstens quadratisch größer als G.

Die Größe von G ist einfach die Länge des Wortes, das man erhält, indem man alle Produktionen zu einem Wort über $V \cup \Sigma$ konkateniert.

Aufgabe 7.4 Chomsky-Normalform 2P

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T, U, V\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen P:

$$
\begin{aligned}
S &\to TVS \mid U \\
T &\to aSb \mid TVT \mid c \\
U &\to cT \mid aV \\
V &\to \varepsilon \mid VV
\end{aligned}
$$

Konstruieren Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' in Chomsky-Normalform.

Hinweis: Es kann hilfreich sein nach jedem Schritt unproduktive und unerreichbare Variablen zu entfernen.

Aufgabe 7.5 Lineare Grammatiken 1P+2P

Wir betrachten die *linearen* Grammatiken aus TA 6.3. Offensichtlich gilt „regulär $\subseteq$ linear $\subseteq$ kontextfrei“. Entscheiden Sie folgende Aussage und geben sie einen passenden Beweis für Ihre Antwort an:

(a) Gilt entweder „regulär $\subset$ linear“ oder „regulär $=$ linear“?

(b) Gilt „linear $=$ kontextfrei“? *Tipp:* TA 6.3 (b)

Tutoraufgaben: Besprechung in KW23

Aufgabe 7.1 Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

(a) Zeigen Sie, dass CFL unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen sind.

(b) Zeigen Sie, dass auch der Präfixabschluss $\{u \mid \exists v\colon uv \in L\}$ einer CFL L kontextfrei ist.

Aufgabe 7.2 CYK-Algorithmus

(a) Sei G durch folgende Produktionen gegeben:

$$S \to AB \mid CD \mid AT \mid CU \mid SS \qquad T \to SB \qquad U \to SD \qquad A \to (\qquad B \to) \qquad C \to \{ \qquad D \to \}$$

Wenden Sie den CYK-Algorithmus auf folgende Wörter an:

$$w_1 = ()\{()\} \qquad w_2 = ()\{(\qquad w_3 = ()\}$$

(b) Wir möchten den CYK-Algorithmus so abändern, dass er Eingabefehler (z.B. eine schließende Klammer ohne passende öffnende Klammer) erkennt und die Position des Fehlers bestimmt. Passen Sie hierzu den CYK-Algorithmus so an, dass er für gegebenes $w \in \Sigma^*$ den längsten Präfix u bestimmt, so dass sich u zu einem Wort in $L(G)$ ergänzen lässt.

Beispiel:

$$G\colon S \to AB \mid SS \qquad A \to a \qquad B \to b$$

Dann gilt $w = ababb \notin L(G)$, aber $ab, abab \in L(G)$; weiterhin gibt es kein $v \in \Sigma^*$, so dass $wv \in L(G)$ gilt, womit $abab$ der gesuchte Präfix ist. Im Fall $w = aba$ wäre aba der gesuchte Präfix, da $wb \in L(G)$ gilt.

(c) Wenden Sie den Algorithmus aus (b) auf die Wörter aus (a) an, um den maximalen Präfix zu bestimmen, der sich noch zu einem Wort in $L(G)$ ergänzen lässt.

Aufgabe 7.3 Ogdens Lemma

Sei L eine CFL. Dann existiert ein $p \in \mathbb{N}_0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geq p$ und jede *Markierung* von mindestens p Zeichen in z gilt: Es gibt eine Zerlerung $z = uvwxy$ mit

- vx enthält mindestens ein markiertes Zeichen.
- vwx enthält höchstens p markierte Zeichen.
- $uv^iwx^iy \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$.

Eine geeignete Markierung kann z.B. Unterstreichung $\underline{a}$, Apostroph a' oder Einfärbung a sein. Markiert man stets alle Zeichen, so erhält man das ursprüngliche Pumping-Lemma für CFL.

(a) Sei $L = \{a^ib^jc^kd^l \mid i = 0 \lor j = k = l\}$.

Zeigen Sie mittels Ogdens Lemma, dass L nicht kontextfrei ist.

(Warum reicht das Pumping-Lemma für CFL nicht aus, um zu zeigen, dass L nicht kontextfrei ist?)

(b) Beweisen Sie Ogdens Lemma.