HA-Lösung

TA-Lösung

Einführung in die theoretische Informatik – Aufgabenblatt 7

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 08.06.2016 (Mittwoch) um 12:00

Aufgabe 7.1 Kontextfreie Sprachen 3P

Sei $L = \{w \in \Sigma^* \colon |w|_a = 2\,|w|_b\}$. Geben Sie eine CFG G über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ mit $L(G) = L$ an und zeigen Sie die Korrektheit mittels Induktion.

Lösung: Die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen P erfüllt die gewünschten Eigenschaften:

$$S \to \varepsilon \mid SS \mid aSaSb \mid aSbSa \mid bSaSa$$

Korrektheitsbeweis:

$L \subseteq L(G)$. Induktion über die Länge von $w \in L$.

- $|w| = 0$: Dann ist $w = \varepsilon$ und kann mit $S \to \varepsilon$ produziert werden. Deshalb $w \in L(G)$.
- $1 \leq |w| \leq 2$: Es gibt kein $w \in L$ mit Länge 1 oder 2.
- $|w| \geq 3$: Sei $w \in L$. Wir verwenden die Funktion h („Höhe“) um die gewichtete Differenz zwischen der Anzahl der as und bs zu beschreiben:
  $$h(w) = 2\,|w|_b - |w|_a$$
  Offensichtlich gilt $h(w) = 0$ gdw. $w \in L$. Wir betrachten folgende Fälle:
  - w hat eine Nullstelle. Es existiert somit eine nicht-triviale Zerlegung $w = uv$ mit $u \neq \varepsilon \neq v$ und $h(u) = h(v) = 0$. Da $|u| < |w| > |v|$ gilt, können wir die Induktionshypothese anwenden und erhalten $S \to SS \to^* uS \to^* uv$ und somit $uv \in L(G)$.
  - w hat keine Nullstelle. Dann trifft einer der drei folgenden Fälle zu:
    * $w = bu$ für ein $u \in \Sigma^*$ mit $h(u) = -2$. Da w keine Nullstellen hat und nur 1-Schritten fallen kann, ist h nicht-negativ für alle Präfixe von w. Weil $h(w) = 0$ gelten muss, kann u in $u = vaa$ mit $v \in \Sigma^*$ und $h(v) = 0$ zerlegt werden. Somit $S \to bSaSa \to bSaa \to^* bvaa = w$ und $w \in L(G)$.
    * $w = aua$ für ein $u \in \Sigma^*$ mit $h(u) = 2$. Da w keine Nullstellen hat, kann u in $u = v_1 b v_2$ mit $v_1, v_2 \in \Sigma^*$ und $h(v_1) = h(v_2) = 0$ zerlegt werden. Somit $S \to aSbSa \to bSaSa \to^* av_1bv_2a = w$ und $w \in L(G)$.
    * $w = ub$ für ein $u \in \Sigma^*$ mit $h(u) = -2$. Analog.

$L \supseteq L(G)$. Induktion über die Länge der Ableitung von $w \in L(G)$.

- $S \to \varepsilon$: $\varepsilon \in L$
- $S \to SS \to^* w_1w_2$: Nach Induktion $w_1, w_2 \in L$ und somit auch $w_1w_2 \in L$.
- $S \to aSaSb \to^* aw_1aw_2b$: Nach Induktion $w_1, w_2 \in L$ und somit auch $aw_1aw_2b \in L$.
- Restliche Fälle analog.

Aufgabe 7.2 Pumping Lemma 3P

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache $L = \{a^i b^{2^i} \mid i \geq 0\}$ nicht kontextfrei ist.

Lösung: Angenommen, L wäre kontextfrei. Dann sei n eine Pumping-Lemma-Zahl und betrachte das Wort $z = a^n b^{2^n}$. Es existiert eine Zerlegung $z = uvwxy$, so dass $vx \neq \epsilon$, $|vwx| \leq n$ und für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $uv^iwx^iy \in L$.

Wir unterscheiden vier Fälle:

(a) $v = a^k$ *und* $x = a^l$ für $k + l > 0$. Dann ist $uv^0wx^0y = a^{n-(k+l)}b^{(2^n)} \notin L$.

(b) $v = b^k$ *und* $x = b^l$ für $k + l > 0$. Dann ist $uv^0wx^0y = a^n b^{(2^n-(k+l))} \notin L$.

(c) $v = a^k b^l$ *oder* $x = a^k b^l$ für $k, l > 0$. Dann ist $v^2 = a^k b^l a^k b^l$, enthält also einen b-a-Übergang. Also ist $uv^2wx^2y \notin L$.

(d) Sonst müssen $v = a^k$ und $x = b^l$ sein für $k, l > 0$. Also ist $uv^{i+1}wx^{i+1}y = a^{n+ik}b^{2^n+il}$ für ein beliebiges $i \in \mathbb{N}_0$. Dieses Wort ist genau dann in L, wenn gilt $2^{n+ik} = 2^n + il$. Eine lineare und eine exponentielle Funktion haben aber höchstens zwei Schnittpunkte; also gilt obige Gleichung höchstens für zwei i und damit insbesondere nicht für alle i.

Für das Wort $z \in L$ existiert also keine passende Zerlegung, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also ist L nicht kontextfrei.

Aufgabe 7.3 CNF Blow-Up 1P + 3P

(a) Geben Sie ein eine Familie von Grammatiken G_n der Größe $\mathcal{O}(n)$ an, so dass eine Übersetzung in eine Grammatik G'_n in CNF **entsprechend den Folien** exponentiell größer ist ($\mathcal{O}(2^n)$) und begründen Sie, warum es dieses Wachstum gibt.

(b) Zeigen Sie: Überführt man eine CFG G in CNF, indem man die Schritte der Folien umordnet nach (3), (4), (1), (2), dann ist die erzeugte Grammatik G' ebenfalls in CNF, jedoch höchstens quadratisch größer als G.

Die Größe von G ist einfach die Länge des Wortes, das man erhält, indem man alle Produktionen zu einem Wort über $V \cup \Sigma$ konkateniert.

Lösung:

(a) $S \to X_1 X_2 \dots X_n \qquad X_i \to a \mid \varepsilon$

(b) Sei n die Größe von G. (3) (4) fügt $\mathcal{O}(n)$ neue Regeln ein (und löscht teilweise einige). (1) fügt jetzt aber nur $\mathcal{O}(n^2)$ neue Regeln ein, da die rechte Seite jeder Regel nur aus zwei Variablen besteht. (2) fügt nun aber auch nur $\mathcal{O}(n)$ Regeln ein.

Aufgabe 7.4 Chomsky-Normalform 2P

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T, U, V\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen P:

$$\begin{aligned} S &\to TVS \mid U \\ T &\to aSb \mid TVT \mid c \\ U &\to cT \mid aV \\ V &\to \varepsilon \mid VV \end{aligned}$$

Konstruieren Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' in Chomsky-Normalform.

Hinweis: Es kann hilfreich sein nach jedem Schritt unproduktive und unerreichbare Variablen zu entfernen.

Lösung: Wir überführen G schrittweise in Chomsky-Normalform:

(a) Elimination von ϵ-Produktionen und der dann unproduktiven Variable V:

$$\begin{aligned} S &\to TS \mid U \\ T &\to aSb \mid TT \mid c \\ U &\to cT \mid a \end{aligned}$$

(b) Elimination von Kettenregeln ($S \to U$) und der dann unerreichbaren Variable U:

$$S \to TS \mid cT \mid a \qquad T \to aSb \mid TT \mid c$$

(c) Einführung von Nichtterminalen für Buchstaben: Für a, b und c werden Nichtterminale A, B und C eingeführt, da die rechte Seiten der Produktionen $S \to cT$ und $T \to aSb$ eine Länge ≥ 2 haben:

$$S \to TS \mid CT \mid a \qquad T \to ASB \mid TT \mid c \qquad A \to a \qquad B \to b \qquad C \to c$$

(d) Aufspalten langer Produktionen:

$$
\begin{aligned}
S &\to TS \mid CT \mid a & \qquad A &\to a \\
T &\to AT' \mid TT \mid c & B &\to b \\
T' &\to SB & C &\to c
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis ist in Chomsky-Normalform.

Aufgabe 7.5 Lineare Grammatiken 1P+2P

Wir betrachten die *linearen* Grammatiken aus TA 6.3. Offensichtlich gilt „regulär $\subseteq$ linear $\subseteq$ kontextfrei“. Entscheiden Sie folgende Aussage und geben Sie einen passenden Beweis für Ihre Antwort an:

(a) Gilt entweder „regulär $\subset$ linear“ oder „regulär $=$ linear“?

(b) Gilt „linear $=$ kontextfrei“? *Tipp:* TA 6.3 (b)

Lösung:

(a) *regulär* $\subset$ *linear*: Die Sprache $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ ist bekanntermaßen nicht regulär. Sie ist aber linear, denn sie wird von der linearen Grammatik $(\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen $S \to aSb \mid ab$ erzeugt.

(b) *linear* $\subset$ *kontextfrei*: Die Sprache $L = \{a^m b^m a^n b^n \mid m > 0, n > 0\}$ ist kontextfrei, denn sie wird von der kontextfreien Grammatik $(\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen $S \to AA$ und $A \to aAb \mid ab$ erkannt. Aber diese Sprache ist nicht linear.

Angenommen, L wäre linear. Dann existiert eine Grammatik G mit $L = L(G)$ in der Form von TA 6.3 (a) und sei $n = |V| + 1$. Wir verwenden nun TA 6.3 (b), um einen Widerspruch abzuleiten. Wir betrachten das Wort $z = a^n b^n a^n b^n$. Laut TA 6.3 (b) existiert eine Zerlegung $z = uvwxy$, so dass

$$(1)\ vx \neq \epsilon \qquad (2)\ |uvxy| \leq n \qquad (3)\ \forall i \in \mathbb{N}_0.\ uv^i wx^i y \in L$$

Aufgrund von (2) gilt $w = a^{n-|uv|} b^n a^n b^{n-|xy|}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $v = a^k$ für $k > 0$. Dann ist $uv^0 wx^0 y = a^{n-k} b^n \cdots \notin L$.

(ii) $x = b^k$ für $k > 0$. Dann ist $uv^0 wx^0 y = \ldots a^n b^{n-k} \notin L$.

Für das Wort $z \in L$ existiert also keine passende Zerlegung, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also ist L nicht linear.

Tutoraufgaben: Besprechung in KW23

Aufgabe 7.1 Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

(a) Zeigen Sie, dass CFL unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen sind.

(b) Zeigen Sie, dass auch der Präfixabschluss $\{u \mid \exists v\colon uv \in L\}$ einer CFL L kontextfrei ist.

Lösung:

(a) Sei L kontextfrei und L' regulär. Ohne Einschränkung gibt es $G = (V, \Sigma, P, S)$ CFG in CNF und $A = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$ DFA mit $L = L(G)$ und $L' = L(A)$.

Idee: Wir erweitern G so, dass eine akzeptierende Berechnung von A geraten wird.

Definiere $G' = (V', \Sigma, P', S')$ wie folgt:

- $V' = Q \times V \times Q$
- $P' = P'_{X\to YZ} \uplus P'_{X\to a} \uplus P'_{S'}$ mit

$$\begin{aligned} P'_{X\to YZ} &:= \{(q, X, q') \to (q, Y, q'')(q'', Z, q') \mid X \to YZ \in P\} \\ P'_{X\to a} &:= \{(q, X, q') \to a \mid X \to a \in P \wedge \delta(q, a) = q'\} \\ P'_{S'} &:= \{S' \to (q_I, S, q_F) \mid q_F \in F\} \cup \{S' \to \varepsilon \mid \varepsilon \in L(G) \cap L(A)\} \end{aligned}$$

Behauptung: $L(G') = L(G) \cap L(A)$

Sei $w = a_1 a_2 \dots a_l \in L(G')$. Dann gibt es eine Ableitung der Form

$$S' \to (q_I, S, q_F) \to^* (q_0, X_1, q_1)(q_1, X_2, q_2) \dots (q_{l-1}, X_l, q_l)$$

mit $(q_{i-1}, X_i, q_i) \to a_i$.

Nach Def. von $P_{X\to YZ}$ muss $q_0 = q_I$ und $q_l = q_F$ gelten.

Nach Def. von $P_{X\to a}$ muss $q_i = \delta(q_{i-1}, a)$ gelten.

Damit existiert eine akzeptierende Berechnung von A zu w, also $w \in L(A)$.

Nach Definition erhält man durch Vergessen der q, q', also durch Übergang von (q, X, q') zu X aus der obigen Ableitung auch eine Ableitung in G, womit auch $w \in L(G)$ folgt.

Insgesamt $w \in L(A) \cap L(G)$.

Sei $w \in L(A) \cap L(G)$. Dann existiert eine akzeptierende Berechnung $q_i = \delta(q_{i-1}, a_i)$ von A zu w und ein Ableitungsbaum zu w bzgl. G. Letzteren erweitert man induktiv zu einem Ableitungsbaum von G': Den inneren Knoten, an dem das Blatt zu a_i hängt, schreibt man von X auf (q_{i-1}, X, q_i) um. Bottom-up/induktiv schreibt man dann X nach (q_i, X, q_k) um, falls seine beiden Kinder (da CNF) gerade $(q_i, Y, q_j), (q_j, Z, q_k)$ sind. Alternativ: aus X wird (q_i, X, q_k), falls X das Teilwort $a_{i+1} \dots a_k$ erzeugt. Da G' die Zwischenzustände q'' frei mittels $P_{X\to YZ}$ raten kann, handelt es sich tatsächlich um einen Ableitungsbaum von w bzgl. P', also $w \in L(G')$.

(b) Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ CFG in CNF mit $L = L(G)$ und $L' := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* \colon uv \in L(G)\}$.

Idee:

Es gilt: $u \in L'$ gdw. es gibt einen Ableitungsbaum zu uv bzgl. G für ein $v \in \Sigma^*$.

Betrachte in diesem Ableitungsbaum zu uv den eindeutigen Pfad vom letzten Zeichen von u zur Wurzel. Wir erweitern G so zu G', dass G' diesen Pfad raten kann und die Teilbäume, die Zeichen von v erzeugen, weglassen kann.

Konstruiere $G' = (V \uplus V' \uplus \{S''\}, \Sigma, P \uplus P', S'')$ hierzu wie folgt:

- $V' = \{X' \mid X \in V\}$ – die Markierung rät den Pfad von der Wurzel zum letzten Zeichen von u und steht immer am rechtesten NT einer Ableitung bzgl. G'
- $P' = \{X' \to YZ', X' \to Y' \mid X \to YZ\} \cup \{X' \to a \mid X \to a \in P\} \cup \{S'' \to S' \mid \varepsilon\}$ – P' erlaubt G' zu raten, ob das letzte Zeichen von u durch Y oder Z erzeugt wird. Falls es durch Y erzeugt wird, wird der durch Z erzeugte Suffix fallengelassen (Fall $X' \to Y'$).

Behauptung:

$L(G') = L' := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* \colon uv \in L(G)\}$.

Beweis:

Sei $u \in L'$. Betrachte entsprechend der obigen Beschreibung einen Ableitungsbaum zu $uv \in L(G)$ bzgl. G. Markiere die Knoten entlang des Pfades vom letzten Zeichen von u bis zur Wurzel. Schneide die Teilbäume zu v ab. Nach Konstruktion erhält man einen Ableitungsbaum zu u bzgl. G'.

Sei $u \in L(G')$. Betrachte Ableitungsbaum zu u bzgl. G'. Für jeden inneren Knoten, der (1) kein Terminal erzeugt, (2) einem markierten NT X' entspricht und (3) nur ein Kind hat, das nach Definition von P' damit auch einem markierten NT Y' entsprechen muss, gibt es eine Regel $X \to YZ \in P$ bzgl. der originalen Grammatik G. OBdA. ist G auf die nützlichen Symbole reduziert, womit es mindestens einen Ableitungsbaum zu Z gibt. Füge diesen als rechten Teilbaum bei dem inneren Knoten an. Ersetze dann X' durch X im Baum, um einen Ableitungsbaum bzgl. G zu erhalten, der ein Wort der Form uv erzeugt.

Aufgabe 7.2 CYK-Algorithmus

(a) Sei G durch folgende Produktionen gegeben:

$$S \to AB \mid CD \mid AT \mid CU \mid SS \qquad T \to SB \qquad U \to SD \qquad A \to (\qquad B \to) \qquad C \to \{ \qquad D \to \}$$

Wenden Sie den CYK-Algorithmus auf folgende Wörter an:

$$w_1 = ()\{()\} \qquad w_2 = ()\{(\qquad w_3 = ()\}$$

(b) Wir möchten den CYK-Algorithmus so abändern, dass er Eingabefehler (z.B. eine schließende Klammer ohne passende öffnende Klammer) erkennt und die Position des Fehlers bestimmt. Passen Sie hierzu den CYK-Algorithmus so an, dass er für gegebenes $w \in \Sigma^*$ den längsten Präfix u bestimmt, so dass sich u zu einem Wort in $L(G)$ ergänzen lässt.

Beispiel:

$$G\colon S \to AB \mid SS \qquad A \to a \qquad B \to b$$

Dann gilt $w = ababb \notin L(G)$, aber $ab, abab \in L(G)$; weiterhin gibt es kein $v \in \Sigma^*$, so dass $wv \in L(G)$ gilt, womit $abab$ der gesuchte Präfix ist. Im Fall $w = aba$ wäre aba der gesuchte Präfix, da $wb \in L(G)$ gilt.

(c) Wenden Sie den Algorithmus aus (b) auf die Wörter aus (a) an, um den maximalen Präfix zu bestimmen, der sich noch zu einem Wort in $L(G)$ ergänzen lässt.

Lösung:

(a) Berechnen der CYK-Tabelle:

16 S					
15	26				
14	25	36 S			
13	24	35	46 U		
12 S	23	34	45 S	56	
11 A	22 B	33 C	44 A	55 B	66 D
(	)	{	(	)	}

Ablesen: $w_1 \in L(G)$, da $S \in V_{16}$. $w_2 \notin L(G)$, da $S \notin V_{14}$. $w_3 \notin L(G)$, da $S \notin V_{46}$.

(b) Gegeben G konstruiere G' mit $L(G') = \{u \mid uv \in L(G)\}$ entsprechend TA 7.1(b) zzgl. Zusammenziehen von Kettenproduktionen $X' \to Y'$.

Sei $w = a_1 \dots a_l$ gegeben und $u = a_1 \dots a_k$ ein Präfix von w.

u lässt sich zu einem Wort aus $L(G)$ ergänzen gdw. $u \in L(G')$ gdw. $S' \in V_{1,k}$ wenn man den CYK bzgl. G' auf w anwendet.

Suche daher nach dem maximalen k, so dass $S' \in V_{1,k}$ gilt, um den maximalen Präfix von w zu bestimmen, der sich zu einem Wort auf $L(G)$ ergänzt lässt.

(c) Berechnete Grammatik für Präfixsprache ohne Start-ε-Produktion:

$$\begin{array}{lcl}
S' & \to & SS' \mid AT' \mid CU' \mid AB \mid CD \mid (\mid \{ \\
S & \to & AB \mid CD \mid AT \mid CU \mid SS \\
T' & \to & SS' \mid AT' \mid CU' \mid AB \mid CD \mid SB \mid (\mid \{ \\
T & \to & SB \\
U' & \to & SD \mid SS' \mid AT' \mid CD \mid CU' \mid AB \mid (\mid \{ \\
U & \to & SD \\
A & \to & (\qquad B \to) \qquad C \to \{ \qquad D \to \}
\end{array}$$

Berechnen der CYK-Tabelle:

$_{16}\ S', S, T', U'$					
$_{15}\ S', T', U'$	$_{26}$				
$_{14}\ S', T', U'$	$_{25}$	$_{36}\ S', S, T', U'$			
$_{13}\ S', T', U'$	$_{24}$	$_{35}\ S', T', U'$	$_{46}\ U, U'$		
$_{12}\ S', S, T', U'$	$_{23}$	$_{34}\ S', T', U'$	$_{45}\ S', S, T', U'$	$_{56}$	
$_{11}\ S', T', U', A$	$_{22}\ B$	$_{33}\ S', T', U', C$	$_{44}\ S', T', U', A$	$_{55}\ B$	$_{66}\ D$
(	)	{	(	)	}

Längste Präfixe:

- $w_1 \in L(G)$
- $w_2 \in L(G')$ und $w_2)\} \in L(G)$
- $w_3 \notin L(G')$, aber $() \in L(G')$ und $() \in L(G)$.

Aufgabe 7.3 Ogdens Lemma

Sei L eine CFL. Dann existiert ein $p \in \mathbb{N}_0$, so dass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geq p$ und jede *Markierung* von mindestens p Zeichen in z gilt: Es gibt eine Zerlerung $z = uvwxy$ mit

- vx enthält mindestens ein markiertes Zeichen.
- vwx enthält höchstens p markierte Zeichen.
- $uv^iwx^iy \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$.

Eine geeignete Markierung kann z.B. Unterstreichung $\underline{a}$, Apostroph a' oder Einfärbung a sein. Markiert man stets alle Zeichen, so erhält man das ursprüngliche Pumping-Lemma für CFL.

(a) Sei $L = \{a^ib^jc^kd^l \mid i = 0 \lor j = k = l\}$.

Zeigen Sie mittels Ogdens Lemma, dass L nicht kontextfrei ist.

(Warum reicht das Pumping-Lemma für CFL nicht aus, um zu zeigen, dass L nicht kontextfrei ist?)

(b) Beweisen Sie Ogdens Lemma.

Lösung:

(a) Sei L kontextfrei. Dann gilt Ogdens Lemma für L. Sei p entsprechend dem Lemma für L gewählt. Wir wählen $z = ab^pc^pd^p \in L$, wobei genau b^p markiert sei.

Damit sind in vwx stets höchstens p Zeichen markiert. Nach Ogdens Lemma enthält vx mindestens ein b.

Mögliche Fälle für vx:

- vx enthält kein c. Dann hat uv^2wx^2y mindestens ein a, $p+1$ bs, aber immer noch p cs.
- vx enthält kein d. Analog.
- vx enthält sowohl ein c als auch ein d zzgl. mindestens einem b. Damit müssen in v oder x mindestens zwei verschiedene Zeichen vorkommen (Schubfachprinzip), womit uv^2wx^2z nicht mehr von der Form $a^*b^*c^*d^*$ sein kann.

Mit dem PL für CFL gelingt der Nachweis, dass L nicht kontextfrei ist, allerdings nicht:

Sei L kontextfrei und n eine somit existierende Pumping-Lemma-Konstante für L. Da $z \in L$ gelten muss, kann man für die Struktur von z in Abhängigkeit von der Anzahl der a zwei Fälle unterscheiden:

$|z|_a > 0$: Somit $z = a^ib^jc^jd^j$ mit $i > 0$ und $j \geq 0$. Hier erlaubt das PL nicht die Position von vwx einzuschränken, womit man nicht ausschließen kann, dass vx nur aus as besteht, womit man keinen Widerspruch herleiten kann. (Hier konnte man mittels Ogdens Lemma erzwingen, dass vx mindestens ein b enthält.)

$|z|_a = 0$: Somit $z = b^jc^kd^l$. Hier kann man nicht ausschließen, dass vwx vollständig in einem Block zu liegen kommt. Da man kein a durch das Pumpen erzeugen kann, kann man in diesem Fall wiederum keinen Widerspruch herleiten.

(b) Sei G eine CFG in CNF mit $L = L(G)$. Sei $p = 2^{|V|}$. Man betrachte einen beliebigen Ableitungsbaum für ein beliebiges Wort $z \in L$, in welchem mindestens p Zeichen markiert sind.

Beginnend bei der Wurzel steigt man stets in den Teilbaum ab, in welchem die größere Anzahl an Blättern markiert ist. In jedem Schritt kann sich somit die Anzahl der erreichbaren markierten Blätter höchstens halbieren, womit man einen Pfad der Länge $\geq |V| + 2$ in dem Ableitungsbaum konstruiert, auf dem sich mindestens ein Nichtterminal wiederholen muss. Wie im normalen PL für CFL wählt man nun von unten aufsteigend das erste sich wiederholende NT, um den Pumpbaum zu definieren, welcher der zyklischen Ableitung $A \to^* vAw$ entspricht. Insbesondere entspricht $A \to^* vwx$ einem Ableitungsbaum der Höhe $\leq |V|$ (wieder unter Vernachlässigung der Terminale), womit vwx höchstens Länge $2^{|V|} = p$ (da G in CNF/Binärbaum) haben kann. Ebenso folgt, dass $|vx| > 0$ gilt, aus der CNF (binäre Ableitungsbäume und keine ε-Regeln).