Einführung in die theoretische Informatik – Aufgabenblatt 6

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 01.06.2016 (Mittwoch) um 12:00

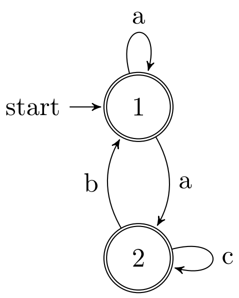
Aufgabe 6.1 Quiz 1P

Geben Sie jeweils ein Beispiel für formale Sprachen mit folgenden Eigenschaften:

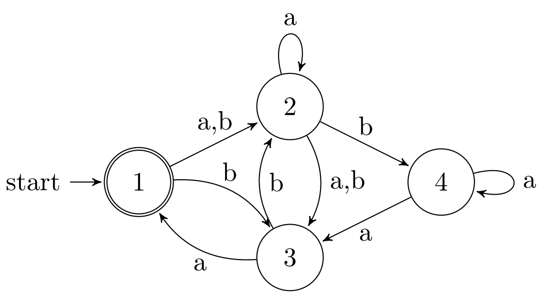
(a) endlich (b) unendlich und regulär (c) nicht regulär und kontextfrei (d) nicht kontextfrei

Aufgabe 6.2 Ardens Lemma 1P+2P

Stellen Sie entsprechend der Vorlesung für jeden der folgenden NFAs das lineare Gleichungssystem auf. Bestimmen Sie dann mittels dem Gauß-Verfahren unter Verwendung von Ardens Lemma einen rationalen Ausdruck, der die vom jeweiligen FA akzeptierte Sprache, beschreibt.



(a) NFA N_a



(b) NFA N_b

Aufgabe 6.3 Inception 2P

Geben Sie eine CFG G an, die genau die Terme über einer Kleene Algebra $\langle K, +, \cdot, ^*, 0, 1\rangle$ erzeugt, die mittels der Konstanten $0, 1, a, b$ gebildet werden können. Die Multiplikation $\cdot$ soll dabei ausgeschrieben werden. Zum Beispiel sollte Ihre Grammatik $a, a + 0, a + b + a, a \cdot a + a^* \cdot a + b \cdot a^* + (a^*)$ erzeugen können, jedoch nicht $+a()$, ^{*1} und auch nicht ab.

Bitte geben Sie für diese Aufgabe nur die Produktionen von G an.

Aufgabe 6.4 Kontextfreie Sprachen 2P+3P

Mit $G = (\{S, X, Y, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ sei die CFG mit folgenden Produktionen P bezeichnet:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & XC \mid AY \\ X & \to & aXb \mid aA \mid bB \\ Y & \to & bYc \mid bB \mid cC \\ A & \to & aA \mid \varepsilon \\ B & \to & bB \mid \varepsilon \\ C & \to & cC \mid \varepsilon \end{array}$$

(a) Geben Sie für jedes der folgenden Wörter jeweils eine Linksableitung und eine Rechtsableitung zzgl. des entsprechenden Syntaxbaums an:

$$aabbb \qquad aaabbcc \qquad aaccc$$

(b) Zeigen Sie: $L(G) = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee j \neq k\}$.

Aufgabe 6.5 **Kleene Algebra** **1P+1P+1P+1P+1P+1P**

Zeigen Sie, dass in jeder Kleene Algebra $\langle K, +, \cdot, ^*, 0, 1\rangle$ für beliebige $a, b, x \in K$ folgende Aussagen gelten. Bitte geben Sie über jedem Schritt in Ihrem Beweis an, welches Axiom der Kleene Algebra Sie verwenden.

(a) $1 \sqsubseteq a^*$, $aa^* \sqsubseteq a^*$ und $a \sqsubseteq a^*$. (b) $a^*a^* = a^*$. (c) $(a^*)^* = a^*$.

(d) $ax \sqsubseteq x \to a^*x \sqsubseteq x$.

Hinweis: Ax6 kann spezialisiert werden zu $1 + a^*a^* \sqsubseteq a^* \to (a^*)^* \sqsubseteq a^*$.

(e) $ax = xb \to a^*x = xb^*$ und damit $a(ba)^* = (ab)^*a$.

Hinweis: Ax6 kann spezialisiert werden zu $x + a(xb^*) \sqsubseteq xb^* \to a^*x \sqsubseteq xb^*$.

(f) $(a + b)^* = a^*(ba^*)^*$.

Hinweis: Ax6 kann spezialsiert werden zu $1 + (a + b)(a^*(ba^*)^*) \sqsubseteq a^*(ba^*)^* \to (a + b)^* \sqsubseteq a^*(ba^*)^*$.

Tutoraufgaben: Besprechung in KW22

Aufgabe 6.1

Die CFG G bestehe aus folgenden Produktionen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & ASA \mid aB \\ A & \to & B \mid S \mid CB \\ B & \to & b \mid \varepsilon \\ C & \to & aC \\ D & \to & aSCb \mid a \end{array}$$

(a) Reduzieren Sie die Grammatik G auf die nützlichen Nichtterminale.

(b) Überführen Sie die reduzierte Grammatik dann in Chomsky-Normalform.

Aufgabe 6.2 Pumping-Lemma (CFL-Edition)

Wir betrachten Pfeil-Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow\}$. Wir interpretieren ein Wort $w \in \Sigma^*$ als einen Pfad in einem 2D-Gitter. Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass folgende Mengen von Pfaden nicht kontextfrei sind:

(a) Pfade, die „umkehren“ — beliebig weit nach rechts fahren, dann entweder nach oben oder unten gehen und dann nach links über die Höhe vom Ursprung nach links fahren:

$$L_a = \bigcup_{i<j<k} L(\rightarrow^i (\uparrow^j \mid \downarrow^j) \leftarrow^k)$$

(b) Pfade, die in den Ursprung zurückkehren:

$$L_b = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_\uparrow = |w|_\downarrow \wedge |w|_\leftarrow = |w|_\rightarrow\}$$

Aufgabe 6.3

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *linear*, falls es eine kontextfreie Grammatik G gibt, so dass auf der rechten Seite einer jeden Produktion höchstens ein Nichtterminal steht (d.h. $P \subseteq V \times (\Sigma^* V \Sigma^* \cup \Sigma^*)$). Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist L linear mit $\varepsilon \notin L$, dann gibt es eine CFG G, so dass $L = L(G)$ und für jede Produktion $X \to \gamma$ gilt: $\gamma \in \Sigma V \cup V \Sigma \cup \Sigma$.

(b) Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ von der Gestalt aus (a), dann gilt:

$$\forall z \in L. \Big(|z| \geq |V| + 1 \to \exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*. \big(z = uvwxy \wedge |vx| > 0 \wedge |uvxy| \leq |V| + 1 \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0. (uv^i w x^i y \in L) \big) \Big)$$