Technische Universität München
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger, S. Sickert

Sommer 2016
18. Mai 2016

Einführung in die theoretische Informatik – Aufgabenblatt 3

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 04.05.2016 (Mittwoch) um 12:00

Einige der folgenden Aufgaben können auch online gelöst werden. Melden Sie sich auf `http://automatatutor.com` *an und schreiben Sie sich in den Kurs* ***90THEO201*** *mit dem Passwort* ***3LUPIYNJ*** *ein. Bitte geben Sie dennoch die Lösungen* ***handschriftlich*** *ab. Bitte Beachten Sie, dass dies nur ein Zusatzangebot darstellt. Wenn eine Lösung als korrekt befunden wird, bedeutet dies* ***nur****, dass die richtige Sprache akzeptiert wird. Der Algorithmus kann dennoch falsch ausgeführt worden sein.*

Aufgabe 3.1 — 2P+2P

Mit $|w|_x$ wird die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens $x \in \Sigma$ in $w \in \Sigma^*$ bezeichnet.

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma\colon\ |w|_x = 0\}$.

(a) Konstruieren Sie einen NFA N mit genau 4 Zuständen und $L(N) = L$.

(b) Determinisieren Sie den NFA N aus (a) mittels der Potenzmengenkonstruktion aus den Folien (ab Folie 31).

Aufgabe 3.2 — 2P+2P

(a) Konstruieren Sie zunächst **mit dem Verfahren aus der Vorlesung** (ab Folie 50) einen ε-NFA N mit $L(N) = L((a|b)^*a)$. Halten Sie sich strikt an die Konstruktion aus den Folien. Als NFA für $x \in \Sigma$ verwenden Sie hierfür den (bis auf Knotenbenennung) kanonischen NFA $(\{q_0, q_1\}, \Sigma, \{(q_0, x, q_1)\}, q_0, \{q_1\})$.

(b) Die Potenzmengenkonstruktion lässt sich auf ε-NFAs wie folgt erweitern:

Gegeben ein ε-NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sei $N' = (Q', \Sigma, \delta', S_0, F')$ wie folgt definiert:

- $S_0 := \bigcup_{i \geq 0} \delta(q_0, \varepsilon^i)$.
- Q' und $\delta'\colon Q' \to Q'$ sind induktiv wie folgt definiert:
  - $S_0 \in Q'$.
  - Falls $S \in Q'$, dann $\delta'(S, a) := \bigcup_{q \in S, i \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}_0} \delta(q, \varepsilon^i a \varepsilon^j)$ für jedes $a \in \Sigma$ und $\delta'(S, a) \in Q'$.
  - Ansonsten enthält Q' keine weiteren Elemente.
- $F' := \{S \in Q' \mid S \cap F \neq \emptyset\}$.

Wenden Sie **diese** Konstruktion an, um aus dem ε-NFA aus (a) einen DFA zu $L((a|b)^*a)$ zu konstruieren.

Aufgabe 3.3 — 2P+2P+2P+2P

Zeigen oder widerlegen Sie:

Für jeden NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ (nur ein Startzustand), gibt es einen NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ mit $L(N) = L(N')$ und

(a) der Startzustand hat keine eingehenden Kanten.

(b) kein Endzustand hat eine ausgehende Kante.

(c) für jeden Zustand gilt: alle eingehenden Kanten sind mit demselben Zeichen beschriftet.

(d) für jeden Zustand gilt: alle ausgehenden Kanten sind mit demselben Zeichen beschriftet.

Tutoraufgaben: Besprechung in KW18

Aufgabe 3.1 Pumping Lemma

Entscheiden Sie für jede der folgenden Sprachen, ob diese regulär sind.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$

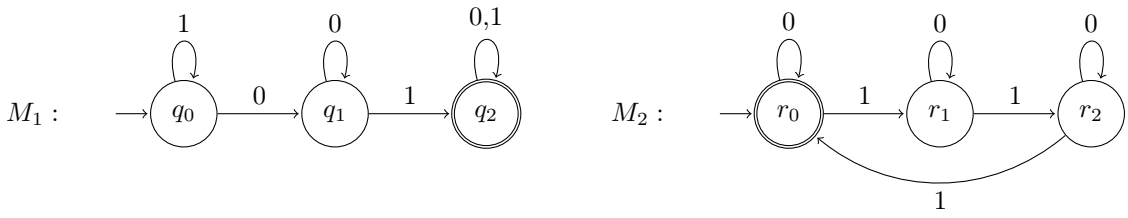
(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geq |w|_1\}$

(c) $L_3 = \{\varepsilon, a, a^{n \cdot m} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m > 1, n > 1\}$

Aufgabe 3.2 Produktkonstruktion

Gegeben seien zwei DFAs M_1 und M_2 über dem gleichen Eingabealphabet. In der Vorlesung haben Sie ein direktes Verfahren (ohne Umweg über reguläre Ausdrücke oder NFAs) gesehen, um einen DFA M mit $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$ zu konstruieren.

(a) Wenden Sie dieses Verfahren auf die beiden folgenden Automaten an:



(b) Diese Produktkonstruktion lässt sich in Python wie folgt implementieren:

```
class DFA(object):
    def __init__(self, states, alphabet, transitions, initial_state, final_states):
        # ...

    def is_initial_state(self, state):
        return state == self.initial_state

    def is_final_state(self, state):
        return state in self.final_states

    def get_successor(self, state, letter):
        return self.transitions.get((state, letter), None)
    pass

def product_construction(dfa_left,dfa_right,boolean_op):
    alphabet = dfa_left.alphabet | dfa_right.alphabet

    dfa_states = set()
    dfa_final_states = set()
    dfa_transitions = dict()
    pair_to_dfa_state = dict()

    def _create_new_state(P):
        new_dfa_state = State('(%s,%s)' % (P[0],P[1]))
        if boolean_op.is_final_state(dfa_left.is_final_state(P[0]),dfa_right.is_final_state(P[1])):
            dfa_final_states.add(new_dfa_state)
        dfa_states.add(new_dfa_state)
        pair_to_dfa_state[P] = new_dfa_state
        return new_dfa_state

    P = (dfa_left.initial_state,dfa_right.initial_state)
    todo = [P]

    dfa_initial_state = _create_new_state(P)

    while len(todo) > 0:
        P = todo.pop()
        cur_dfa_state = pair_to_dfa_state[P]
        for a in alphabet:
            Suc = (dfa_left.get_successor(P[0],a),dfa_right.get_successor(P[1],a))
            suc_dfa_state = pair_to_dfa_state.get(Suc)
            if suc_dfa_state is None:
                suc_dfa_state = _create_new_state(Suc)
                todo.append(Suc)
            dfa_transitions[(cur_dfa_state, a)] = suc_dfa_state
            pass
        pass
    return DFA(dfa_states, alphabet, dfa_transitions, dfa_initial_state, dfa_final_states)
```

```
class BooleanOp(object):
    @staticmethod
    def is_final_state(left_final,right_final):
        return ____________________________
    pass
```

Definieren Sie is_final_state so, dass obige Funktion gerade einen DFA zu $L(A) \cap L(B)$ konstruiert.

(c) Definieren Sie is_final_state so, dass obige Funktion gerade einen DFA zu $L(A) \triangle L(B)$ konstruiert, wobei $\triangle$ die symmetrische Differenz zweier Mengen bezeichnet.

(d) Überlegen Sie sich, warum man annehmen darf, dass ein DFA höchstens einen Zustand hat, von welchem aus kein Endzustand erreichbar ist (üblicherweise als ablehnender Zustand oder "trap state" oder "rejecting state" bezeichnet).

Wir erweitern die Klasse DFA entsprechend um die Methode is_rejecting_state inklusive der notwendigen Anpassungen an Attributen und dem Konstruktor. Entsprechend erweitern wir die Signatur der Funktion product_construction um das Argument is_rejecting_in_product.

ändern Sie die Funktion product_construction so ab, dass der erzeugte DFA höchstens einen ablehnenden Zustand hat und unnötige Zustände erst gar nicht konstruiert werden.

Definieren Sie dann is_rejecting_in_product sowohl für den Schnitt als auch die symmetrische Differenz.

```
class IntersectionOp(object):
    @staticmethod
    def is_final_state(left_final,right_final):
        return left_final and right_final
    pass
```

(a) Schnitt

```
class SymDiffOp(object):
    @staticmethod
    def is_final_state(left_final,right_final):
        return left_final != right_final
    pass
```

(b) Symmetrische Differenz

```
def is_rejecting_in_product(left_rejecting,
    right_rejecting):
    return left_rejecting or right_rejecting
```

(a) Schnitt

```
def is_rejecting_in_product(left_rejecting,
    right_rejecting):
    return left_rejecting and right_rejecting
```

(b) Symmetrische Differenz

Aufgabe 3.3 Suffix Sprachen

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über dem Alphabet Σ. Mit $L_{\text{sf}} = \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^* \colon uv \in L\}$ sei die Sprache der Suffixe von L bezeichnet.

Beispiel: Für $L = \{abc, d\}$ ergibt sich $L_{\text{sf}} = \{\varepsilon, c, bc, abc, d\}$.

(a) Sei L regulär. Zeigen Sie, dass auch L_{sf} regulär ist, indem Sie aus einem NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L = L(N)$ einen ε-NFA N' mit $L_{\mathbf{sf}} = L(N')$ konstruieren.

(b) Konstruieren Sie direkt, ohne den Umweg über NFAs einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L((ab \mid b)^* cd)_{\text{sf}}$.

(c) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, dass einen gegebenen regulären Ausdruck r direkt in einen regulären Ausdruck r' mit $L(r') = L(r)_{\text{sf}}$ umschreibt.

Knobelaufgabe

Freiwillige Abgabe per E-Mail an theo-uebungsleitung@in.tum.de. Der Preis diese Woche für die ersten drei richtigen Gesamtlösungen ist jeweils eine Fritz Cola. Alle richtigen Einsendungen bis zum 11.05.2016 um 12:00 Uhr erhalten die Bonuspunkte. Wir bewerten von jedem Studenten nur die erste Einsendung und behalten uns das Recht vor unleserliche oder unverständliche Abgaben nicht zu korrigieren.

Aufgabe 3.1 Präfixfreie Sprachen — Bonus: 2P

Erinnerung: Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist *präfixfrei*, falls $\forall u \in L\colon u\Sigma^* \cap L = \{u\}$.

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA und $L_q = L_q(M)$ die von M akzeptierte Sprache, wenn q statt q_0 als Startzustand gewählt wird. (Damit: $L(M) = L_{q_0}(M)$.)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Behauptung falsch ist:

L ist präfixfrei **gdw.** $L_q(M) = \{\varepsilon\}$ für alle $q \in F$.

(b) Korrigieren Sie die rechte Seite der vermeintlichen Äquivalenz aus (a) so, dass eine korrekte Charakterisierung von DFAs gegeben ist, welche präfixfreie Sprachen akzeptieren.

Aufgabe 3.2 Strukturelle Eigenschaften von Automaten — Bonus: 2P

Wir erweitern NFAs und ε-NFAs um die Möglichkeit, mehrere Startzustände $I \subseteq Q$ zu besitzen. Ein NFA bzw. ε-NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ akzeptiert ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $\emptyset \neq F \cap \bigcup_{q_0 \in I} \delta(q_0, w)$, d.h. wenn es mindestens einen akzeptierenden Ablauf von irgendeinem Startzustand aus gibt.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Für jeden NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, gibt es einen ε-NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', I', F')$ mit $L(N) = L(N')$ und für jeden Zustand gilt: alle ausgehenden Kanten sind mit demselben Zeichen beschriftet.

(b) Für jeden NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, gibt es einen NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', I', F')$ mit $L(N) = L(N')$ und für jeden Zustand gilt: alle ausgehenden Kanten sind mit demselben Zeichen beschriftet.