Einführung in die theoretische Informatik – Aufgabenblatt 2

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 27.04.2016 (Mittwoch) um 12:00

Aufgabe 2.1 — 2P+2P+2P

Sei Σ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$.

Wahr oder falsch? Zeigen Sie die Aussage oder widerlegen sie Sie mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels:

(a) $A(B \setminus C) = AB \setminus AC$ (b) $(AB)^* = (AB \cup B)^*$ (c) $(A^*B^*)^* = (A \cup B)^*$

Aufgabe 2.2 — 4P

Konstruieren Sie einen **DFA** mit dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ., -\}$ der nur Zeichenketten, die Dezimalzahlen darstellen, so wie sie von Menschen geschrieben werden, erkennt.

Die folgenden Aufgaben können auch online gelöst werden. Melden Sie sich auf `http://automatatutor.com` *an und schreiben Sie sich in den Kurs* ***90THEO201*** *mit dem Passwort* ***3LUPIYNJ*** *ein. Bitte geben Sie dennoch die Lösungen* ***handschriftlich*** *ab. Wir empfehlen die Benutzung von Mozilla Firefox, da mit anderen Browsern die Darstellung teilweise inkorrekt sein kann.*

Aufgabe 2.3 — 1P+1P+1P+1P+1P

Finden Sie zu folgenden Sprachen reguläre Ausdrücke. Verwenden Sie für die ersten drei Aufgaben das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und für die letzten beiden $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) Wörter gerader Länge.

(b) Wörter, die mit einem a beginnen und enden, sowie Wörter, die mit einem b beginnen und enden.

(c) Wörter, in denen kein a neben einem b steht.

(d) Zahlen in Binärdarstellung (most-significant-bit-first), die durch 2 teilbar sind.

(e) Zahlen in Binärdarstellung (most-significant-bit-first), die nicht durch 4 teilbar sind.

Tutoraufgaben: Besprechung in KW17

Aufgabe 2.1

Wir erweitern NFAs und ε-NFAs um die Möglichkeit, mehrere Startzustände $I \subseteq Q$ zu besitzen. Ein NFA bzw. ε-NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ akzeptiert ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $\emptyset \neq F \cap \bigcup_{q_0 \in I} \delta(q_0, w)$, d.h. wenn es mindestens einen akzeptierenden Ablauf von irgendeinem Startzustand aus gibt.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Aus jedem NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ kann ein NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', I', F')$ mit $L(N) = L(N')$ konstruiert werden, so dass

  (i) … $|I'| = 1$.

  (ii) … $|F'| = 1$.

  (iii) … $|I'| = 1$ und $|F'| = 1$.

(b) Wie (a) nur mit $N = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ ein ε-NFA mit mehreren Startzuständen.

(c) Wie (a) nur mit einem DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ (d.h. $|I| = 1$ gilt stets).

Aufgabe 2.2

Sei Σ ein endliches Alphabet. Ein *sternfreier* Ausdruck über Σ ist wie folgt induktiv definiert:

- Syntax:
  - $\boldsymbol{\emptyset}$ ist ein (atomarer) sternfreier Ausdruck.
  - $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist ein (atomarer) sternfreier Ausdruck.
  - a ist ein (atomarer) sternfreier Ausdruck für jedes $a \in \Sigma$.
  - Sind α, β sternfreie Ausdrücke, dann auch $(\alpha\beta)$ (Konkatenation), $\overline{\alpha}$ (Komplement) und $(\alpha|\beta)$ (Vereinigung).
  - Ansonsten gibt es keine sternfreie Ausdrücke, d.h. jeder sternfreie Ausdruck lässt sich in endlich vielen Schritte mittels Konkatenation, Komplement und Vereinigung aus den atomaren Ausdrücken konstruieren.
- Semantik:

$$L(\boldsymbol{\emptyset}) := \emptyset \quad L(\boldsymbol{\varepsilon}) := \{\varepsilon\} \quad L(a) := \{a\} \quad L((\alpha\beta)) := L(\alpha)L(\beta) \quad L(\overline{\alpha}) := \Sigma^* \setminus L(\alpha) \quad L((\alpha|\beta)) := L(\alpha) \cup L(\beta)$$

(a) Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass $L(\alpha)$ eine reguläre Sprache über Σ ist, falls α ein sternfreier Ausdruck über Σ ist. Passen Sie hierfür den Beweis aus den Folien, dass jeder reguläre Ausdruck sich in einen NFA übersetzen lässt, entsprechend an. Verwenden Sie hierzu ohne Beweis:

Ist $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA, so akzeptiert der DFA $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$ gerade die Sprache $L(M') = \Sigma^* \setminus L(M)$.

Machen Sie sich insbesondere klar: Für jeden sternfreien Ausdruck α gibt es einen regulären Ausdruck α' mit $L(\alpha) = L(\alpha')$.

Anmerkung: Die Umkehrung gilt nicht, z.B. ist $L((aa)^*)$ eine reguläre Sprache über $\Sigma = \{a\}$, welche sich nicht durch einen sternfreien Ausdruck beschreiben lässt.

(b) Behauptung: $L\Big(\boldsymbol{\varepsilon}|\overline{\overline{a\overline{\boldsymbol{\emptyset}}}|\overline{\overline{\boldsymbol{\emptyset}}b}|\overline{\boldsymbol{\emptyset}}aa\overline{\boldsymbol{\emptyset}}|\overline{\boldsymbol{\emptyset}}bb\overline{\boldsymbol{\emptyset}}}\Big) = L\big((ab)^*\big)$ für $\Sigma = \{a, b\}$.

Zeigen Sie die Behauptung, indem sie den sternfreien Ausdruck in einen NFA übersetzen, dann den NFA in einen regulären Ausdruck entsprechend der Vorlesung übersetzen und schließlich den erhaltenen regulären Ausdruck mittels der Äquivalenzen aus der Vorlesung zu $(ab)^*$ vereinfachen.

Für die Übersetzung des finalen NFA in einen regulären Ausdruck vereinfachen Sie den NFA zunächst: Machen Sie sich klar, dass alle Zustände, die nicht einen Endzustand erreichen können, entfernt werden dürfen, ohne dass sich hierdurch die akzeptierte Sprache ändert.

Knobelaufgaben

Freiwillige Abgabe per E-Mail an theo-uebungsleitung@in.tum.de. Der Preis diese Woche für die ersten drei richtigen Gesamtlösungen ist jeweils eine Club Mate.

Aufgabe 2.1 Reguläre Ausdrücke

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Finden Sie einen möglichst kurzen regulären Ausdruck für die Sprache, in der alle Wörter gleich oft die Zeichenketten ab und ba enthalten.

Aufgabe 2.2 coNFA

Wir betrachten das duale Model zu dem NFA und definieren für diese Aufgabe einen coNFA, der ein Wort w akzeptiert gdw. alle Berechnungen in einem Endzustand enden. Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein coNFA. Dann wird das Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann akzeptiert, wenn $\delta(q_0, w) \subseteq F$.

- Kann ein coNFA ohne Endzustände ein Wort akzeptieren?
- Entwerfen Sie eine Übersetzung zu DFAs und beweisen Sie deren Korrektheit.