Einführung in die theoretische Informatik – Aufgabenblatt 1

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 20.04.2016 (Mittwoch) um 12:00

Aufgabe 1.1 — 1P+1P+1P+1P+1P

Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{\epsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$. Bestimmen Sie folgende Mengen:

(a) AB (b) A^2 (c) B^0 (d) $A\emptyset$ (e) $A \times (\emptyset^*)$

Aufgabe 1.2 — 1P+1P+1P+1P+1P

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \{aa, aaa, b\}$. Geben Sie, wenn möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

(a) $L_1 = \{w \mid w \in A^2 \wedge w \in A^3\}$

(b) $L_2 = \{w \in A^* \mid |w| = 3\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \exists v \in A. w = uv\}$

(d) $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u. uw = w^2 u\}$

(e) $L_5 = \{(ba^n b)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Die folgenden Aufgaben können auch online gelöst werden. Melden Sie sich auf `http://automatatutor.com` *an und schreiben Sie sich in den Kurs* ***90THEO201*** *mit dem Passwort* ***3LUPIYNJ*** *ein. Bitte geben Sie dennoch die Lösungen* ***handschriftlich*** *ab. Wir empfehlen die Benutzung von Mozilla Firefox, da mit anderen Browsern die Darstellung teilweise inkorrekt sein kann.*

Aufgabe 1.3 — 1P+1P+1P+1P+1P+2P

Konstruieren Sie jeweils einen **DFA** über $\Sigma = \{a, b, c\}$, der die folgenden Sprachen erkennt:

(a) Alle Wörter, die mit einem b beginnen. (b) Alle Wörter gerader Länge.

(c) Alle Wörter ungerader Länge, die auf ein c enden. (d) Die Sprache, die nur das leere Wort enthält.

(e) Alle Wörter, die aab enthalten. (f) Alle Wörter, die eine durch drei teilbare Anzahl von c enthalten.

Aufgabe 1.4 — 1P+2P

Konstruieren Sie jeweils einen **NFA** über $\Sigma = \{a, b, c\}$, der die folgenden Sprachen erkennt:

(a) Alle Wörter, die $aaab$ enthalten.

(b) Alle Wörter, deren 3-letzter Buchstabe ein a ist, z.B. $babb$. Der Automat sollte nicht mehr als 4 Zustände haben.

Tutoraufgaben: Besprechung in KW16

Aufgabe 1.1

Sei Σ ein Alphabet und $L, M, N \subseteq \Sigma^*$ beliebig.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $L^* = L^+$ gdw. $\varepsilon \in L$

(b) $L(M \cap N) = LM \cap LN$

(c) Falls $L \subseteq M$, dann $L^n \subseteq M^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Unter der Annahme $L \neq \emptyset$ gilt: $L = LL$ gdw. $L = L^*$.

Aufgabe 1.2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_k = \{w_1 \dots w_l \mid l \in \mathbb{N}, w_j \in \Sigma, w_{l-k} = a\}$ die Sprache aller Wörter über Σ, die an der $(k+1)$-ten Stelle von rechts ein a stehen haben. Insbesondere ist L_0 die Menge aller Wörter, die auf a enden.

(a) Geben Sie jeweils einen NFA für L_0, L_1 und L_2 an.

(b) Geben Sie jeweils einen DFA für L_0 und L_1 an.

Versuchen Sie jeweils, so wenig Zustände wie möglich zu verwenden.

Aufgabe 1.3

Sei Σ ein Alphabet. Gegeben zwei Wörter $u, w \in \Sigma^*$ wird u als *Präfix* von w bezeichnet, falls es ein $x \in \Sigma^*$ mit $w = ux$ gibt.

$L \subseteq \Sigma^*$ heißt *präfixfrei*, falls es keine zwei *verschiedenen* Wörter $u, w \in L$ gibt, so dass u ein Präfix von w ist, und $\epsilon \notin L$.

Mit $L^\times$ sei die Menge aller endlichen *Tupel* mit Einträgen aus L bezeichnet. Sei

$$c\colon L^\times \to \Sigma^*\colon (w^{(1)}, \dots, w^{(n)}) \mapsto w^{(1)} \dots w^{(n)}$$

die Abbildung, die die Einträge eines Tupels aus $L^\times$ zu einem Wort konkateniert.

(a) Geben Sie eine Sprache $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ an, so dass $|L^2| = |L \times L|$ gilt.

(b) Geben Sie eine Sprache $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ an, so dass $|L^2| \neq |L \times L|$ gilt.

(c) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ beliebig. Zeigen Sie: c bildet $L^\times$ bijektiv auf L^* ab, wenn L präfixfrei ist.

(d) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine nicht präfixfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ an, für die c dennoch eine Bijektion von $L^\times$ nach L^* ist.