HA-Lösung

TA-Lösung

Einführung in die theoretische Informatik – Aufgabenblatt 1

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 20.04.2016 (Mittwoch) um 12:00

Aufgabe 1.1 — 1P+1P+1P+1P+1P

Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{\epsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$. Bestimmen Sie folgende Mengen:

(a) AB (b) A^2 (c) B^0 (d) $A\emptyset$ (e) $A \times (\emptyset^*)$

Lösung:

(a) $AB = \{a, ba, aa, aba, abba\}$ (b) $A^2 = \{\epsilon, a, ab, aa, aab, aba, abab\}$ (c) $B^0 = \{\epsilon\}$

(d) $A\emptyset = \emptyset$ (e) $A \times (\emptyset^*) = \{(\epsilon, \epsilon), (a, \epsilon), (ab, \epsilon)\}$

Aufgabe 1.2 — 1P+1P+1P+1P+1P

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \{aa, aaa, b\}$. Geben Sie, wenn möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

(a) $L_1 = \{w \mid w \in A^2 \wedge w \in A^3\}$

(b) $L_2 = \{w \in A^* \mid |w| = 3\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \exists v \in A. w = uv\}$

(d) $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u. uw = w^2 u\}$

(e) $L_5 = \{(ba^n b)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Lösung:

(a) $L_1 = \{a^6\}$, $a, b, aaa \in \Sigma^* \setminus L_1$

(b) $aaa, aab, bbb \in L_2$, $a, bb, aaab \in \Sigma^* \setminus L_2$

(c) $aa, bbaa, bab \in L_3$, $ba, aba, bba \in \Sigma^* \setminus L_3$

(d) $L_4 = \{\epsilon\}$, $a, b, aa \in \Sigma^* \setminus L_4$

(e) $\epsilon, bab, baabbaab \in L_5$, $bb, baab, abba \in \Sigma^* \setminus L_5$

Die folgenden Aufgaben können auch online gelöst werden. Melden Sie sich auf `http://automatatutor.com` *an und schreiben Sie sich in den Kurs* ***90THEO201*** *mit dem Passwort* ***3LUPIYNJ*** *ein. Bitte geben Sie dennoch die Lösungen* ***handschriftlich*** *ab. Wir empfehlen die Benutzung von Mozilla Firefox, da mit anderen Browsern die Darstellung teilweise inkorrekt sein kann.*

Aufgabe 1.3 **1P+1P+1P+1P+1P+2P**

Konstruieren Sie jeweils einen **DFA** über $\Sigma = \{a, b, c\}$, der die folgenden Sprachen erkennt:

(a) Alle Wörter, die mit einem b beginnen. (b) Alle Wörter gerader Länge.

(c) Alle Wörter ungerader Länge, die auf ein c enden. (d) Die Sprache, die nur das leere Wort enthält.

(e) Alle Wörter, die aab enthalten. (f) Alle Wörter, die eine durch drei teilbare Anzahl von c enthalten.

Lösung: Die Lösungen finden Sie unter `https://www7.in.tum.de/um/courses/theo/ss2016/theo16-01-lsg.zip`.

Aufgabe 1.4 **1P+2P**

Konstruieren Sie jeweils einen **NFA** über $\Sigma = \{a, b, c\}$, der die folgenden Sprachen erkennt:

(a) Alle Wörter, die $aaab$ enthalten.

(b) Alle Wörter, deren 3-letzter Buchstabe ein a ist, z.B. $babb$. Der Automat sollte nicht mehr als 4 Zustände haben.

Lösung: Die Lösungen finden Sie unter `https://www7.in.tum.de/um/courses/theo/ss2016/theo16-01-lsg.zip`.

Tutoraufgaben: Besprechung in KW16

Aufgabe 1.1

Sei Σ ein Alphabet und $L, M, N \subseteq \Sigma^*$ beliebig.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $L^* = L^+$ gdw. $\varepsilon \in L$

(b) $L(M \cap N) = LM \cap LN$

(c) Falls $L \subseteq M$, dann $L^n \subseteq M^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Unter der Annahme $L \neq \emptyset$ gilt: $L = LL$ gdw. $L = L^*$.

Lösung:

(a) Falls $\varepsilon \in L$: $L^+ = L \cup LL^+ = \{\varepsilon\} \cup L \cup LL^+ = \{\varepsilon\} \cup L^+ = L^*$

Falls $\varepsilon \notin L$: $w \in L^n$ impliziert $|w| \geq n$, da w sich in n nicht leere Wörter aus L faktorisieren lässt. Damit hat jedes Wort aus L^+ positive Länge, somit $\varepsilon \notin L^+$ und damit auch $L^* \neq L^+$.

(b) Wähle $L = \{a\}^*$, $M = \{\epsilon\}$ und $N = \{a\}$.

Dann gilt $L(M \cap N) = L\emptyset = \emptyset \neq \{a^i \mid i \geq 1\} = \{a^i \mid i \geq 0\} \cap \{a^i \mid i \geq 1\} = LM \cap LN$.

(c) Sei $w \in L^n$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $w = w^{(1)} \dots w^{(n)}$ für $w^{(i)} \in L \subseteq M$ nach Def. von L^n bzw. Voraussetzung. Somit auch $w \in M^n$ nach Def. von M^n.

(d) $\Leftarrow$: Es gelte $L = L^*$.

Wir zeigen $L^*L^* = L^*$. Sei $w \in L^*L^*$. Dann existieren nach Definition $u, v \in L^*$ mit $uv = w$. Weiterhin existieren $u^{(1)} \dots u^{(k)}, v^{(1)} \dots v^{(l)} \in L$ mit $k, l \in \mathbb{N}_0$, sodass $u = u^{(1)} \dots u^{(k)}$ und $v = v^{(1)} \dots v^{(l)}$. Somit $w = u^{(1)} \dots u^{(k)} v^{(1)} \dots v^{(l)} \in L^*$. Da w beliebig, folgt $L^*L^* \subseteq L^*$. Da $\varepsilon \in L^*$ gilt stets $L^* \subseteq L^*L^*$.

Dann $L = L^* = L^*L^* = LL$.

$\Rightarrow$: Es gelte $L = LL$. Nach Definition gilt $L \subseteq L^*$. Somit bleibt nur noch $L \supseteq L^*$ zu zeigen:

Wir zeigen zuerst $L^0 \overset{\textbf{Def}}{=} \{\varepsilon\} \subseteq L$.

Sei $w \in L = LL$ ein kürzestes Wort. Dann lässt sich w in zwei Wörter $u, v \in L$ mit $|w| = |u| + |v|$ faktorisieren. Da w ein kürzestes Wort ist, folgt $0 = |w| = |u| = |v|$, also $w = \varepsilon$.

Es bleibt zu zeigen, dass $L^k \subseteq L$ für alle $k \geq 1$.

Nach Annahme gilt die Induktionsbasis. Für $k > 1$ beliebig, aber fest folgt induktiv: $L^{k+1} = L^k L \overset{\textbf{IH}}{\subseteq} LL = L$.

Somit $L^* = \bigcup_{k \geq 0} L^k \subseteq L$.

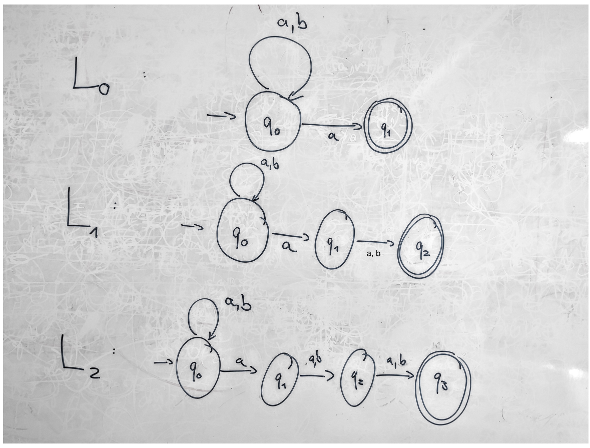
Aufgabe 1.2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_k = \{w_1 \dots w_l \mid l \in \mathbb{N}, w_j \in \Sigma, w_{l-k} = a\}$ die Sprache aller Wörter über Σ, die an der $(k+1)$-ten Stelle von rechts ein a stehen haben. Insbesondere ist L_0 die Menge aller Wörter, die auf a enden.

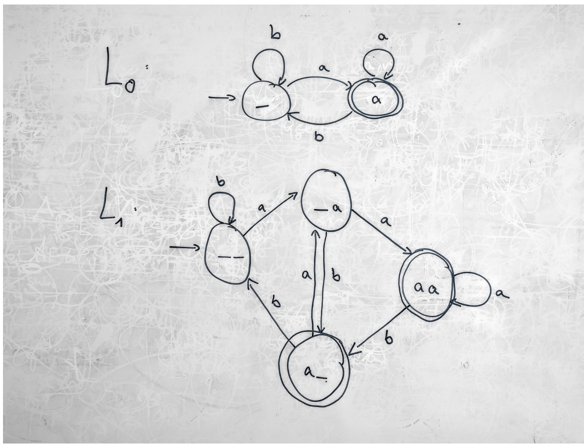
(a) Geben Sie jeweils einen NFA für L_0, L_1 und L_2 an.

(b) Geben Sie jeweils einen DFA für L_0 und L_1 an.

Versuchen Sie jeweils, so wenig Zustände wie möglich zu verwenden.



(a) NFAs



(b) DFAs

Lösung:

(a) Kann nicht-deterministisch in DFA springen, der noch genau $k-1$ beliebige Zeichen akzeptiert.

(b) Zustände speichern jeweils die letzten k gelesenen Zeichen.

Aufgabe 1.3

Sei Σ ein Alphabet. Gegeben zwei Wörter $u, w \in \Sigma^*$ wird u als *Präfix* von w bezeichnet, falls es ein $x \in \Sigma^*$ mit $w = ux$ gibt. $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *präfixfrei*, falls es keine zwei *verschiedenen* Wörter $u, w \in L$ gibt, so dass u ein Präfix von w ist, und $\epsilon \notin L$. Mit $L^\times$ sei die Menge aller endlichen *Tupel* mit Einträgen aus L bezeichnet. Sei

$$c\colon L^\times \to \Sigma^*\colon (w^{(1)}, \dots, w^{(n)}) \mapsto w^{(1)} \dots w^{(n)}$$

die Abbildung, die die Einträge eines Tupels aus $L^\times$ zu einem Wort konkateniert.

(a) Geben Sie eine Sprache $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ an, so dass $|L^2| = |L \times L|$ gilt.

(b) Geben Sie eine Sprache $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ an, so dass $|L^2| \neq |L \times L|$ gilt.

(c) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ beliebig. Zeigen Sie: c bildet $L^\times$ bijektiv auf L^* ab, wenn L präfixfrei ist.

(d) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine nicht präfixfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ an, für die c dennoch eine Bijektion von $L^\times$ nach L^* ist.

Lösung:

(a) $L = \{a\}$

(b) $L = \{\varepsilon, a\}$

(c) Wir nehmen an, dass L präfixfrei ist. Wir zeigen nun, dass c von $L^\times$ nach L^* surjektiv und injektiv abbildet.

Surjektivität: Sei $w \in L^*$. Dann existieren $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots w^{(n)} \in L^*$ mit $w = w^{(1)} \dots w^{(n)} = c((w^{(1)}, \dots, w^{(n)}))$. Weiterhin haben wir: $(w^{(1)}, \dots, w^{(n)}) \in L^\times$.

Injektivität: Sei $\vec{w} = (w^{(1)}, \dots, w^{(n)}), \vec{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)}) \in L^\times$ mit $c(\vec{u}) = c(\vec{w})$. O.E. gelte $\left|u^{(1)}\right| \leq \left|w^{(1)}\right|$. Dann muss $u^{(1)}$ ein Präfix von $w^{(1)}$ sein. Da $w^{(1)}, u^{(1)} \in L$ und L präfixfrei, folgt $w^{(1)} = u^{(1)}$. Induktiv folgt $\vec{u} = \vec{w}$.

Somit ist c bijektiv in diesem Fall.

(d) $L = \{a, ab\}$. Die Positionen der b geben eindeutig die Faktoren ab vor. Allgemeiner z.B. jede suffixfreie Sprache: nach (c) lässt sich dann w^R bzgl. L^R eindeutig faktorisieren, da L^R dann präfixfrei.