Perlen der Informatik 2: Blatt 2

Javier Esparza

18. Juni 2014

1 Hausaufgaben

Problem 1.1 *Zufällige Belegung*

Gegeben sei die Formel

$$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee x_5)$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällige Belegung von $(x_1, ..., x_5)$ eine erfüllende Belegung?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine erfüllende Belegung 3 oder mehr der x_i auf falsch gesetzt?

Problem 1.2 *Zufällige Formel*

Gegeben sei die Belegung

$$x_1 = true, x_2 = true, x_3 = false$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Klausel mit 3 Literalen in der jedes der x_i (positiv oder negativ) enthalten ist erfüllt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Klausel mit 3 Literalen von dieser Belegung erfüllt?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine 3-Sat Formel mit m Klauseln, die wie in a) aufgebaut sind, erfüllt? Wie ist es wenn die Klauseln beliebig aufgebaut sind?

Data: m, n, k
Result: eine k-KNF Formel mit n Variablen und m Klauseln
for $i = 1$ *to* m **do**
    Wähle zufällig eine k-elementige Menge aus $\{x_1, ..., x_n\}$;
    Wähle für jedes Element dieser Menge zufällig, ob das Literal positiv oder negativ sein soll;
    Die so gewählte Menge ist die Klausel K_i;
end
return $K_1 \wedge K_2 \wedge ... \wedge K_m$

Problem 1.3 *Phasenübergang*

In der Vorlesung haben wir den Phasenübergang besprochen, d.h. die Grenze $\delta = \frac{m}{n}$ ab der eine Formel mit m Klauseln und n Variablen fast sicher unerfüllbar wird. Bestimmen sie diese Grenze für 3-KNF und 4-KNF experimentell indem sie folgenden Algorithmus zum Erstellen einer Formel verwenden:

Wenden sie diesen Algorithmus wiederholt für verschiedene m an und bestimmen sie mittels minisat ob die generierte Formel erfüllbar ist. Grenzen sie experimentell einen möglichst kleinen Bereich für $\delta = \frac{m}{n}$ ein, ab dem die Formel fast sicher unerfüllbar wird.

2 Übungsaufgaben

Problem 2.1 *Probabilistische Methoden*

In der Vorlesung haben wir folgende probabilistische Methode gelernt um eine erfüllende Belegung für 2-SAT zu finden:

Data: Formel φ
Result: Erfüllende Belegung für φ
Wähle eine zufällige Belegung;
while *Belegung erfüllt* φ *nicht* **do**
    Wähle eine Klausel die nicht von der Belegung erfüllt wird;
    Ändere den Wert eines der Literale in der Klausel;
end
return *Die gefundene Belegung*

Wir möchten nun den ungefähren Erwartungswert der Schleifendurchläufe berechnen, falls es nur eine erfüllende Belegung gibt.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, die erfüllende Belegung direkt zu treffen?

b) Wie besprochen kann man eine “Distanz” der aktuellen Belegung zur erfüllenden Belegung angeben, die Anzahl der Variablen die geändert werden müssen. Wie wahrscheinlich hat die zufällige Belegung Distanz k von der erfüllenden Belegung?

c) Geben sie eine Summenformel an die den Erwartungswert der Schleifendurchläufe angibt. Verwenden sie dabei, dass es im Schnitt $2kn - k^2$ Schritte dauert bis man von k Distanz zur erfüllenden Belegung kommt.

d) Schätzen sie das Ergebnis der Summenformel indem sie nur den Term für $k = n/2$ betrachten. (Dieser ist der mit der höchsten Wahrscheinlichkeit am Anfang getroffen zu werden.)

e) Benutzen sie WolframAlpha um die Summe korrekt zu berechnen.