Resolutionsrestriktionen

Bei den Resolutionsrestriktionen wird die Wahlfreiheit bei der Auswahl der zu resolvierenden Klauseln dadurch eingeschränkt, daß gewisse Resolutionsschritte verboten sind, weil die Klauseln nicht die der jeweiligen Restriktion entsprechende Form haben.

Eine Restriktion ist vollständig, wenn der durch sie entstandene Kalkül vollständig ist.

Wir betrachten einige Restriktionen im aussagenlogischen Fall. (Erweiterung auf dem prädikatenlogischen Fall ist einfach.)

Die positive und die negative Resolution

P-Resolution: eine der beiden Klauseln, die resolviert werden, muß positiv sein, also nur aus positiven Literalen bestehen.

N-Resolution: eine der beiden Klauseln, die resolviert werden, muß negativ sein, also nur aus negativen Literalen bestehen.

Satz: Die P- und die N-Resolution sind vollständig.

Beweis

Wir betrachten nur die P-Resolution, N-Resolution analog.
Sei F eine unerfüllbare Formel. Zu zeigen: die leere Klausel ist durch P-Resolution herleitbar.
Durch Induktion über die Anzahl n der atomaren Formeln.
Fall $n = 0$ einfach. Sei $n > 0$ und sei A atomare Formel in F.
Beispiel:

$$F = \{\ \{A, \neg C\}\ ,\ \{A, B, C\}\ ,\ \{\neg A, \neg B, \neg C\}\ ,\ \{\neg A, B\}\ ,\ \{\neg B, C\}\ \}$$

Wir wissen: $F[A/0]$ und $F[A/1]$ sind unerfüllbar.

$$\begin{aligned} F[A/0] &= \{\ \{\neg C\}\ ,\ \{B, C\}\ ,\ \{\neg B, C\}\ \} \\ F[A/1] &= \{\ \{\neg B, \neg C\}\ ,\ \{B\}\ ,\ \{\neg B, C\}\ \} \end{aligned}$$

Schritt 1

(1) Konstruiere mit P-Resolution eine Herleitung der leeren Klausel aus $F[A/0]$ (existiert wegen Induktionsvoraussetzung).

$$F[A/0]: \quad \{\neg C\} \qquad \{B, C\} \qquad \{\neg B, C\}$$

Schritte 2 und 3

(2) Transformiere die Herleitung aus Schritt 1 in einer Herleitung von $\{A\}$ aus F.

(3) Füge weitere Resolutionschritte hinzu, die $\{A\}$ mit jeder Klausel in F, die $\neg A$ enthält, resolviert.

$$F: \quad \{A, \neg C\} \quad \{A, B, C\} \quad \{\neg A, \neg B, \neg C\} \quad \{\neg A, B\} \quad \{\neg B, C\}$$

Damit haben wir gerade die Klauseln in $F[A/1]$ bereitgestellt.

Schritt 3

Füge eine Herleitung der leeren Klausel aus $F[A/1]$ hinzu.

$$F[A/1]: \quad \{\neg B, \neg C\} \quad \{B\} \quad \{\neg B, C\}$$

Lineare Resolution

Lineare Resolution: eine der beiden Klauseln muß der zuletz berechnete Resolvent sein (im ersten Schritt dürfen zwei beliebige Klauseln resolviert werden).

Satz: Die lineare Resolution ist vollständig.

Beweis

Sei F eine unerfüllbare Formel.

$$F = \{ \ \{A\} \ , \ \{A, B, C\} \ , \ \{\neg A, \neg B, \neg C\} \ , \ \{\neg A, B\} \ , \ \{\neg B, C\} \ \}$$

Sei $F' \subseteq F$ eine unerfüllbare Teilmenge von F minimaler Größe

$$F' = \{ \ \{A\} \ , \ \{\neg A, \neg B, \neg C\} \ , \ \{\neg A, B\} \ , \ \{\neg B, C\} \ \}$$

Wir zeigen: für *jede* Klausel K aus F' gibt es eine lineare Herleitung der leeren Klausel, die mit K anfängt.
Beweis durch Induktion über die Anzahl n der atomaren Formeln.
Fall $n = 0$ einfach. Sei $n > 0$ und sei A eine atomare Formel aus F.
Wir betrachten zwei Fälle: $|K| = 1$ und $|K| > 1$.

Fall $|K| = 1$

Sei $K = \{L\}$.

$$K = \{A\}$$

Wir wissen: $F'[A/0]$ und $F'[A/1]$ sind unerfüllbar.

Schritt 1: Wähle eine unerfüllbare Teilmenge F'' von $F'[L/1]$ minimaler Größe.

$$F'' = F'[A/1] = \{ \ \{\neg B, \neg C\} \ , \ \{B\} \ , \ \{\neg B, C\} \ \}$$

Wähle eine Klausel $K' \in F''$ mit $K' \cup \{\overline{L}\} \in F'$.

(Die gibt es, sonst $F'' \subseteq F' - \{K\}$ und damit wegen Minimalität von F' ist F'' erfüllbar.)

$$K' = \{\neg B, \neg C\}$$

Fall $|K| = 1$ (Fort.)

Schritt 2: Konstruiere mit linearer Resolution eine Herleitung der leeren Klausel aus F'', die mit K' anfängt (existiert wegen Induktionsvoraussetzung).

$$F'' : \quad \{\neg B, \neg C\} \quad \{B\} \quad \{C\}$$

Fall $|K| = 1$ (Fort.)

Schritt 3: Resolviere $\{L\}$ mit $K' \cup \{\overline{L}\}$, füge die Herleitung aus Schritt 3 hinzu, um eine Herleitung von $\{\overline{L}\}$ aus F' zu gewinnen, und resolviere $\{L\}$ und $\{\overline{L}\}$.

$$F' : \quad \{A\} \quad \{\neg A \neg B, \neg C\} \quad \{\neg A, B\} \quad \{\neg B, C\}$$

Fall $|K| > 1$

$$F = \{ \ \{A\} \ , \ \{A, B, C\} \ , \ \{\neg A, \neg B, \neg C\} \ , \ \{\neg A, B\} \ , \ \{\neg B, C\} \ \}$$
$$F' = \{ \ \{A\} \ , \ \{\neg A, \neg B, \neg C\} \ , \ \{\neg A, B\} \ , \ \{\neg B, C\} \ \}$$
$$K = \{\neg A, \neg B, \neg C\}$$

Schritt 1: Wähle $L \in K$ beliebig und setze $K' = K - \{L\}$.

$$L = \neg B \quad K' = \{\neg A, \neg C\}$$

Wähle eine minimal unerfüllbare Teilmenge F'' von $F'[L/0]$, die K' enthält. (Aufgabe: warum existiert sie?)

$$F'' = F'[\neg B/0] = F'[B/1] = \{ \ \{A\} \ , \ \{\neg A, \neg C\} \ , \ \{C\} \ \}$$

Fall $|K| > 1$ (Fort.)

Schritt 2: Konstruiere mit linearer Resolution eine Herleitung der leeren Klausel aus F'', die mit K' anfängt (existiert wegen Induktionsvoraussetzung). Transformiere sie in einer Herleitung von $\{L\}$ aus F'.

$$F' : \quad \{A\} \quad \{\neg A, \neg B \neg C\} \quad \{\neg A, B\} \quad \{\neg B, C\}$$

Fall $|K| > 1$ (Fort.)

Schritt 3: Wende nun den ersten Fall an $(F' - \{K\}) \cup \{\{L\}\}$.
(Möglich, denn $(F' - \{K\}) \cup \{\{L\}\}$ unerfüllbar und $(F' - \{K\})$ erfüllbar.)

$$(F' - \{K\}) \cup \{\{L\}\} : \quad \{A\} \quad \{\neg A, B\} \quad \{\neg B, C\} \quad \{\neg B\}$$

Fall $|K| > 1$ (Fort.)

Schritt 4: Konkateniere die Herleitungen aus den Schritten 2 und 3.

$$F' : \quad \{A\} \quad \{\neg A, \neg B \neg C\} \quad \{\neg A, B\} \quad \{\neg B, C\}$$

SLD-Resolution

Das Erfüllbarkeitproblem für aussagenlogische Horn-Formeln kann in linearer Zeit gelöst werden.

Das Erfüllbarkeitproblem für prädikatenlogische Horn-Aussagen ist jedoch immer noch unentscheidbar.

Die SLD-Resolution ist nur für Horn-Formeln definiert.

SLD-Resolution: lineare Resolution, die mit einer negativen Klausel (die Zielklausel) anfängt, und folgende Restriktion respektiert: Bei jedem Resolutionsschrit ist eine Elternklausel eine nicht-negative Inputklausel (definite Klauseln oder Programmklauseln).

Satz: Die SLD-resolution ist vollständig (für Hornformeln).

Beweis: Sei F eine unerfüllbare Hornformel.

(1) F enthält eine negative Klausel K.
Beweis: Aufgabe.

(2) Es gibt eine lineare Resolutionsherleitung der leeren Klausel aus F mit K als Basis.
Schon bewiesen.

(3) In dieser Herleitung ist in jedem Schritt eine der zwei Klauseln, die resolviert werden, eine Programmklausel.
Beweis: wegen der Hornbedingung sind alle Resolventen der Herleitung negativ. Da negative Klauseln nur mit nicht-negativen resolviert werden können, folgt, dass die andere eine Programmklausel sein muss.