Herbrand Universum

Das *Herbrand- Universum* $D(F)$ einer geschlossenen Formel F in Skolemform ist die Menge aller variablenfreie Terme, die aus den Bestandteilen von F gebildet werden können. Im speziellen Fall, daß in F keine Konstante vorkommt, wählen wir zunächst eine beliebige Konstante, zum Beispiel a, und bilden dann die variablenfreien Terme. Formaler ausgedrückt, $D(F)$ wird wie folgt induktiv definiert:

(1) Alle in F vorkommenden Konstanten sind in $D(F)$. Falls F keine Konstante enthält, so ist a in $D(F)$.

(2) Für jedes in F vorkommende n-stellige Funktionssymbol f und Terme $t_1, t_2, \ldots, t_n$ in $D(F)$ ist der Term $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in $D(F)$.

Herbrand Strukturen

Sei F eine Aussage in Skolemform. Dann heißt jede zu f passende Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ eine *Herbrand-Struktur* für F, falls folgendes gilt:

(1) $U_\mathcal{A} = D(F)$,

(2) für jedes in F vorkommende n-stellige Funktionssymbol f und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(F)$ ist $f^\mathcal{A}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Der fundamentale Satz der Prädikatenlogik

Satz: Sei F eine Aussage in Skolemform. F ist genau dann erfüllbar, wenn F ein Herbrand-Modell besitzt.

Herbrand-Expansion

Sei $F = \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n F^*$ eine Aussage in Skolemform. Dann ist $E(F)$ die *Herbrand-Expansion* von F, definiert als

$$E(F) = \{F^*[y_1/t_1][y_2/t_2]\ldots[y_n/t_n] \mid t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(F)\}$$

Die Formeln in $E(F)$ entstehen also, indem die Terme in $D(F)$ in jeder möglichen Weise für die Variablen in F^* substituiert werden.

Satz von Gödel-Herbrand-Skolem

Satz: Für jede Aussage F in Skolemform gilt: F ist erfüllbar genau dann, wenn die Formelmenge $E(F)$ (im aussagenlogischen Sinn) erfüllbar ist.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß F ein Herbrand-Modell besitzt genau dann, wenn $E(F)$ erfüllbar ist.

Die Formel F habe die Form $\forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n F^*$. Nun gilt:

$\mathcal{A}$ ist ein Herbrand-Modell für F
gdw. für alle $t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(F)$ gilt:

$$\mathcal{A}_{[y_1/t_1][y_2/t_2]\ldots[y_n/t_n]}(F^*) = 1$$

gdw. für alle $t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(F)$ gilt:

$$\mathcal{A}(F^*[y_1/t_1][y_2/t_2]\ldots[y_n/t_n]) = 1$$

gdw. für alle $G \in E(F)$ gilt $\mathcal{A}(G) = 1$
gdw. $\mathcal{A}$ ist ein Modell für $E(F)$

Satz von Herbrand

Satz: Eine Aussage F in Skolemform ist unerfüllbar genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge von $E(F)$ gibt, die (im aussagenlogischen Sinn) unerfüllbar ist.
Beweis: Ummittelbare Folge des Satzes von Gödel-Herbrand-Skolem und des Endlichkeitssatzes.

Algorithmus von Gilmore

Sei F eine prädikatenlogische Aussage in Skolemform und sei $\{F_1, F_2, F_3, \ldots,\}$ eine Aufzählung von $E(F)$.

Eingabe: F
$n := 0$;
repeat $n := n + 1$;
until $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n)$ ist unerfüllbar;
Gib "unerfüllbar" aus und stoppe.

Satz von Löwenheim-Skolem

Satz: Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik besitzt bereits ein abzählbares Modell (also eines mit abzählbarer Grundmenge).

Beweis: Aus F gewinnen wir G in Skolemform mit:

> F hat ein Modell mit Grundmenge X genau dann, wenn G ein Modell mit Grundmenge X hat.

F erfüllbar $\rightarrow$ G erfüllbar $\rightarrow$ G besitzt ein Herbrand-Modell (X, I_1) $\rightarrow$ F besitzt ein Modell (X, I_2) $\rightarrow$ F besitzt ein abzählbares Modell (da X aufzählbar)