

Äquivalenzen

Satz. Seien F und G beliebige Formeln:

$$(1) \quad \neg\forall xF \equiv \exists x\neg F$$

$$\neg\exists xF \equiv \forall x\neg F$$

(2) Falls x in G nicht frei vorkommt, gilt:

$$(\forall xF \wedge G) \equiv \forall x(F \wedge G)$$

$$(\forall xF \vee G) \equiv \forall x(F \vee G)$$

$$(\exists xF \wedge G) \equiv \exists x(F \wedge G)$$

$$(\exists xF \vee G) \equiv \exists x(F \vee G)$$

$$(3) \quad (\forall xF \wedge \forall xG) \equiv \forall x(F \wedge G)$$

$$(\exists xF \vee \exists xG) \equiv \exists x(F \vee G)$$

$$(4) \quad \forall x\forall yF \equiv \forall y\forall xF$$

$$\exists x\exists yF \equiv \exists y\exists xF$$

Bereinigte Formeln

Eine Formel heißt **bereinigt**, sofern es keine Variable gibt, die in der Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommt, und sofern hinter allen vorkommenden Quantoren verschiedene Variablen stehen.

Lemma. Sei $F = QxG$ eine Formel mit $Q \in \{\forall, \exists\}$. Sei y eine Variable, die in G nicht vorkommt. Dann gilt $F \equiv QyG[x/y]$.

Lemma. Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel in bereinigter Form.

Pränexform

Eine Formel heißt **pränex** oder in **Pränexform**, falls sie die Bauart hat

$$Q_1y_1Q_2y_2 \dots Q_ny_nF,$$

wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, $n \geq 0$, und die y_i Variablen sind. Es kommt ferner kein Quantor in F vor.

Satz. Für jede Formel gibt es eine äquivalente (und bereinigte) Formel in Pränexform.

Skolemform

Für jede Formel F in **BPF** definieren wir ihre *Skolemform(-el)* als das Resultat der Anwendung folgenden Algorithmus auf F :

while F enthält einen Existenzquantor **do**

begin

F habe die Form $F = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \exists z G$ für eine Formel G in **BPF** und $n \geq 0$ (der Allquantorblock kann auch leer sein);

Sei f ein neues bisher in F nicht vorkommendes n -stelliges Funktionssymbol;

$F := \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n G[z/f(y_1, y_2, \dots, y_n)]$;

(d. h. der Existenzquantor in F wird gestrichen und jedes Vorkommen der Variablen z in G durch

$F(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ersetzt)

end

Satz. Für jede Formel F in **BFP** gilt: F ist erfüllbar genau dann, wenn die Skolemform von F erfüllbar ist.

Klauselform

Eine Aussage heißt in **Klauselform**, falls sie die Bauart hat

$$\forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n F,$$

wobei F keine Quantoren enthält und in **KNF** liegt.

Eine Aussage in Klauselform kann als Menge von Klauseln dargestellt werden.

Umformungsschritte

Gegeben: eine prädikatenlogische Formel F (mit eventuellen Vorkommen von freien Variablen).

1. Bereinige F durch systematisches Umbenennen der gebundenen Variablen. Es entsteht eine zu F äquivalente Formel F_1 .
2. Seien y_1, y_2, \dots, y_n die in F bzw. F_1 vorkommenden freien Variablen. Ersetze F_1 durch $F_2 = \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n F_1$. Dann ist F_2 erfüllbarkeitsäquivalent zu F_1 und F und enthält keine freien Variablen mehr.
3. Stelle eine zu F_2 äquivalente (und damit zu F erfüllbarkeitsäquivalente) Aussage F_3 in Pränexform her.

- Eliminiere die vorkommenden Existenzquantoren durch Übergang zur Skolemform von F_3 . Diese sei F_4 und ist dann erfüllbarkeitsäquivalent zu F_3 und damit auch zu F .
- Forme die Matrix von F_4 um in **KNF** (und schreibe diese Formel F_5 dann als Klauselmenge auf).

Aufgabe

Welche dieser Formel sind bereinigt, in Pränexform, in Skolemform, in Klauselform?

	B	P	S	K
$\forall x(Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$				
$\exists x \exists y(Cube(y) \vee BackOf(x, y))$				
$\forall x(\neg FrontOf(x, x) \wedge \neg BackOf(x, x))$				
$\neg \exists x Cube(x) \leftrightarrow \forall x \neg Cube(x)$				
$\forall x(Cube(x) \rightarrow Small(x)) \rightarrow \forall y(\neg Cube(y) \rightarrow \neg Small(y))$				
$(Cube(a) \wedge \forall x Small(x)) \rightarrow Small(a)$				
$\exists x(Larger(a, x) \wedge Larger(x, b)) \rightarrow Larger(a, b)$				