Äquivalenzen

Satz. Seien F und G beliebige Formeln:

(1) $\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F$
$\neg\exists x F \equiv \forall x \neg F$

(2) Falls x in G nicht frei vorkommt, gilt:
$(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x (F \wedge G)$
$(\forall x F \vee G) \equiv \forall x (F \vee G)$
$(\exists x F \wedge G) \equiv \exists x (F \wedge G)$
$(\exists x F \vee G) \equiv \exists x (F \vee G)$

(3) $(\forall x F \wedge \forall x G) \equiv \forall x (F \wedge G)$
$(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x (F \vee G)$

(4) $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

Bereinigte Formeln

Eine Formel heißt bereinigt, sofern es keine Variable gibt, die in der Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommt, und sofern hinter allen vorkommenden Quantoren verschiedene Variablem stehen.

Lemma. Sei $F = QxG$ eine Formel mit $Q \in \{\forall, \exists\}$. Sei y eine Variable, die in G nicht vorkommt. Dann gilt $F \equiv QyG[x/y]$.

Lemma. Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel in bere

nigter Form.

Pränexform

Eine Formel heißt pränex oder in Pränexform, falls sie die Bauart hat

$$Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n F,$$

wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, $n \geq 0$, und die y_i Variablen sind. Es kommt ferner kein Quantor in F vor.

Satz. Für jede Formel gibt es eine äquivalente (und bereinigte) Formel in Pränexform.

Skolemform

Für jede Formel F in $\mathbf{BPF}$ definieren wir ihre *Skolemform(–el)* als das Resultat der Anwendung folgenden Algorithmus auf F:
while F enthält einen Existenzquantor **do**
begin
F habe die Form $F = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \exists z G$ für eine Formel G in $\mathbf{BPF}$ und $n \geq 0$ (der Allquantorblock kan
auch leer sein);
Sei f ein neues bisher in F nicht vorkommendes n–stelliges Funktionssymbol;
$F := \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k G[z/f(y_1, y_2, \dots, y_n)]$;
(d. h. der Existenzquantor in F wird gestrichen und jedes Vorkommen der Variablen z in G durch $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ersetzt)
end

Satz. Für jede Formel F in $\mathbf{BFP}$ gilt: F ist erfüllbar genau dann, wenn die Skolemform von F erfüllbar ist.

Klauselform

Eine Aussage heißt in **Klauselform**, falls sie die Bauart hat

$$\forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n\; F,$$

wobei F keine Quantoren enthält und in $\mathbf{KNF}$ liegt.

Eine Ausage in Klauselform kann als Menge von Klauseln dargeste[l]lt werden.

Umformungsschritte

Gegeben: eine prädikatenlogische Formel F (mit eventuellen Vorkommen von freien Variablen).

1. Bereinige F durch systematisches Umbenennen der gebundenen Variablen. Es entsteht eine zu F äquivalente Formel F_1.
2. Seien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die in F bzw. F_1 vorkommenden freien Variablen. Ersetze F_1 durch $F_2 = \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n F_1$. Dann ist F_2 erfüllbarkeitsäquivalent zu F_1 und F und enthält keine freien Variablen mehr.
3. Stelle eine zu F_2 äquivalente (und damit zu F erfüllbarkeitsäquivalente) Aussage F_3 in Pränexform her.

- Eliminiere die vorkommenden Existenzquantoren durch Übergang zur Skolemform von F_3. Diese sei F_4 und ist dann erfüllbarkeitsäquivalent zu F_3 und damit auch zu F.
- Forme die Matrix von F_4 um in $\mathbf{KNF}$ (und schreibe diese Formel F_5 dann als Klauselmenge auf).

Aufgabe

Welche dieser Formel sind bereinigt, in Pränexform, in Skolemform, in Klauselform?

	B	P	S	K
$\forall x(\mathit{Tet}(x) \vee \mathit{Cube}(x) \vee \mathit{Dodec}(x))$				
$\exists x \exists y(\mathit{Cube}(y) \vee \mathit{BackOf}(x,y))$				
$\forall x(\neg \mathit{FrontOf}(x,x) \wedge \neg \mathit{BackOf}(x,x))$				
$\neg \exists x \mathit{Cube}(x) \leftrightarrow \forall x \neg \mathit{Cube}(x)$				
$\forall x(\mathit{Cube}(x) \to \mathit{Small}(x)) \to \forall y(\neg \mathit{Cube}(y) \to \neg \mathit{Small}(y))$				
$(\mathit{Cube}(a) \wedge \forall x \mathit{Small}(x)) \to \mathit{Small}(a)$				
$\exists x(\mathit{Larger}(a,x) \wedge \mathit{Larger}(x,b)) \to \mathit{Larger}(a,b)$				