

Syntax der Prädikatenlogik: Variablen, Terme

Eine *Variable* hat die Form x_i mit $i = 1, 2, 3, \dots$

Ein *Prädikatsymbol* hat die Form P_i^k und ein *Funktionssymbol* hat die Form f_i^k mit $i = 1, 2, 3, \dots$ und $k = 0, 1, 2, \dots$. Hierbei heißt i jeweils der *Unterscheidungsindex* und k die *Stellenzahl* (oder Stelligkeit). Wir definieren nun die *Terme* durch einen induktiven Prozeß:

- (1) Jede Variable ist ein Term.
- (2) Falls f ein Funktionssymbol mit der Stellenzahl k , und falls t_1, \dots, t_k Terme sind, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.

Hierbei sollen auch Funktionssymbole der Stellenzahl 0 eingeschlossen sein, und in diesem Fall sollen die Klammern wegfallen. Nullstellige Funktionssymbole heißen auch *Konstanten*.

Formeln

Nun können wir (wiederum induktiv) definieren, was *Formeln* (der Prädikatenlogik) sind.

- (1) Falls P ein Prädikatsymbol der Stelligkeit k ist, und falls t_1, \dots, t_k Terme sind, dann ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine Formel.
- (2) Für jede Formel F ist auch $\neg F$ eine Formel.
- (3) Für alle Formeln F und G sind auch $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.
- (4) Falls x eine Variable ist und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln. Das Symbol \exists wird *Existenzquantor* und \forall *Allquantor* genannt.

Atomare Formeln nennen wir genau die, die gemäß 1. aufgebaut sind. Falls F eine Formel ist und F als Teil einer Formel G auftritt, so heißt F *Teilformel* von G .

Freie und gebundene Variablen, Aussagen

Alle Vorkommen von Variablen in einer Formel werden in *freie* und *gebundene* Vorkommen unterteilt. Dabei heißt ein Vorkommen der Variablen x in der Formel F gebunden, falls x in einer Teilformel von F der Form $\exists xG$ oder $\forall xG$ vorkommt. Andernfalls heißt dieses Vorkommen von x frei.

Eine Formel ohne Vorkommen einer freien Variablen heißt *geschlossen* oder eine *Aussage*.

Die *Matrix* einer Formel F ist diejenige Formel, die man aus F erhält, indem jedes Vorkommen von \exists bzw. \forall , samt der dahinterstehenden Variablen gestrichen wird. Symbolisch bezeichnen wir die Matrix der Formel F mit F^* .

Aufgabe

NF: Nicht-Formel F: Formel, aber nicht Aussage A: Aussage

	NF	F	A
$\forall x P(a)$			
$\forall x \exists y (Q(x, y) \vee R(x, y))$			
$\forall x Q(x, x) \rightarrow \exists x Q(x, y)$			
$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x, x)$			
$\forall x (P(y) \wedge \forall y P(x))$			
$P(x) \rightarrow \exists x Q(x, P(x))$			
$\forall f \exists x P(f(x))$			

NF: Nicht-Formel F: Formel, aber nicht Aussage A: Aussage

	NF	F	A
$\forall x(\neg\forall yQ(x, y) \wedge R(x, y))$			
$\exists z(Q(z, x) \vee R(y, z)) \rightarrow \exists y(R(x, y) \wedge Q(x, z))$			
$\exists x(\neg P(x) \vee P(f(a)))$			
$P(x) \rightarrow \exists xP(x)$			
$\exists x\forall y((P(y) \rightarrow Q(x, y)) \vee \neg P(x))$			
$\exists x\forall xQ(x, x)$			

Semantik der Prädikatenlogik: Strukturen

Eine *Struktur* ist ein Paar $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ wobei $U_{\mathcal{A}}$ eine beliebige aber **nicht leere** Menge ist, die die *Grundmenge* von \mathcal{A} (oder der *Grundbereich*, der *Individuenbereich*, das *Universum*) genannt wird.

Ferner ist $I_{\mathcal{A}}$ eine Abbildung, die

- jedem k -stelligen Prädikatsymbol P (das im Definitionsbereich von $I_{\mathcal{A}}$ liegt) ein k -stelliges Prädikat über $U_{\mathcal{A}}$ zuordnet,
- jedem k -stelligen Funktionssymbol f (das im Definitionsbereich von $I_{\mathcal{A}}$ liegt) eine k -stellige Funktion auf $U_{\mathcal{A}}$ zuordnet,
- jeder Variablen x (sofern $I_{\mathcal{A}}$ auf x definiert ist) ein Element der Grundmenge $U_{\mathcal{A}}$ zuordnet.

Sei F eine Formel und $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ eine Struktur. \mathcal{A} heißt zu F *passend*, falls $I_{\mathcal{A}}$ für alle in F vorkommenden Prädikatsymbole, Funktionssymbole und freien Variablen definiert ist.

Mit anderen Worten, der Definitionsbereich von $I_{\mathcal{A}}$ ist eine Teilmenge von $\{P_i^k, f_i^k, x_i \mid i = 1, 2, 3, \dots \text{ und } k = 0, 1, 2, \dots\}$, und der Wertebereich von $I_{\mathcal{A}}$ ist eine Teilmenge aller Prädikate und Funktionen auf $U_{\mathcal{A}}$, sowie der Elemente von $U_{\mathcal{A}}$. Wir schreiben abkürzend statt $I_{\mathcal{A}}(P)$ einfach $P^{\mathcal{A}}$, statt $I_{\mathcal{A}}(f)$ einfach $f^{\mathcal{A}}$ und statt $I_{\mathcal{A}}(x)$ einfach $x^{\mathcal{A}}$.

Auswertung in einer Struktur

Sei F eine Formel und \mathcal{A} eine zu F passende Struktur. Für jeden Term t , den man aus den Bestandteilen von F bilden kann (also aus den Variablen und Funktionssymbolen), definieren wir nun den **Wert** von t in der Struktur \mathcal{A} , den wir mit $\mathcal{A}(t)$ bezeichnen. Die Definition ist wieder induktiv.

- (1) Falls t eine Variable ist (also $t = x$), so ist $\mathcal{A}(t) = x^{\mathcal{A}}$.
- (2) Falls t die Form hat $t = f(t_1, \dots, t_k)$ wobei t_1, \dots, t_k Terme und f ein k -stelliges Funktionssymbol ist, so ist
$$\mathcal{A}(t) = f^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k)).$$

Der Fall 2 schließt auch die Möglichkeit ein, daß f nullstellig ist, als t die Form hat $t = a$. In diesem Fall ist also $\mathcal{A}(t) = a^{\mathcal{A}}$.

Auf analoge Weise definieren wir (induktiv) den (*Wahrheits–*) *Wert* der Formeln F unter der Struktur \mathcal{A} , wobei wir ebenfalls die Bezeichnung $\mathcal{A}(F)$ verwenden.

- Falls F die Form hat $F = P(t_1, \dots, t_k)$ mit den Termen t_1, \dots, t_k und k -stelligem Prädikatsymbol P , so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k)) \in P^{\mathcal{A}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \neg G$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(G) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = (G \wedge H)$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(G) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(H) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = (G \vee H)$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(G) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}(H) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \forall xG$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls für alle } d \in U_{\mathcal{A}} \text{ gilt : } \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \exists xG$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls es ein } d \in U_{\mathcal{A}} \text{ gibt mit : } \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Hierbei bedeutet $\mathcal{A}_{[x/d]}$ diejenige Struktur \mathcal{A}' , die überall mit \mathcal{A} identisch ist, bis auf die Definition von $x^{\mathcal{A}'}$. Es sei nämlich $x^{\mathcal{A}'} = d$, wobei $d \in U_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}'}$ — unabhängig davon, ob $I_{\mathcal{A}}$ auf x definiert ist oder nicht.

Modell, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Falls für eine Formel F und eine zu F passende Struktur \mathcal{A} gilt $\mathcal{A}(F) = 1$, so schreiben wir wieder $\mathcal{A} \models F$.

Sprechweise: F *gilt* in \mathcal{A} oder \mathcal{A} ist *Modell* für F .

Falls jede zu F passende Struktur ein Modell für F ist, so schreiben wir $\models F$, andernfalls $\not\models F$.

Sprechweise: F ist *(allgemein-)gültig*.

Falls es mindestens ein Modell für die Formel F gibt, so heißt F *erfüllbar*, andernfalls *unerfüllbar*.

Aufgabe

G: Gültig E: Erfüllbar, aber nicht gültig U: Unerfüllbar

	G	E	U
$\forall x P(a)$			
$\exists x (\neg P(x) \vee P(a))$			
$P(a) \rightarrow \exists x P(x)$			
$P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\forall x P(x) \wedge \neg \forall y P(y)$			

G: Gültig E: Erfüllbar, aber nicht gültig U: Unerfüllbar

	G	E	U
$\forall x(P(x, x) \rightarrow \exists x\forall yP(x, y))$			
$\forall x\forall y(x = y \rightarrow f(x) = f(y))$			
$\forall x\forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$			
$\exists x\exists y\exists z(f(x) = y \wedge f(x) = z \wedge y \neq z)$			

Folgerung und Äquivalenz

Eine Formel G heißt eine *Folgerung* der Formeln F_1, \dots, F_k falls für jede Struktur, die sowohl zu F_1, \dots, F_k als auch zu G passend ist, gilt:

Wenn \mathcal{A} Modell von $\{F_1, \dots, F_k\}$ ist, dann ist \mathcal{A} auch Modell von G .

Wir schreiben $F_1, \dots, F_k \models G$, falls G eine Folgerung von F_1, \dots, F_k ist.

Zwei Formeln F und G heißen (*semantisch*) *äquivalent*, falls für alle Strukturen \mathcal{A} , die sowohl für F als auch für G passend sind, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$. Hierfür schreiben wir $F \equiv G$.

Aufgabe

(1) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x, x)$

(2) $\forall x (P(x) \vee Q(x, x))$

(3) $\forall x (\forall z P(z) \vee \forall y Q(x, y))$

	J	N
1. \models 2.		
2. \models 3.		
3. \models 1.		

Aufgabe

(1) $\exists y \forall x P(x, y)$

(2) $\forall x \exists y P(x, y)$

	J	N
1. \models 2.		
2. \models 1.		

Aufgabe

	J	N
$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$		
$\forall x \exists y F \equiv \exists x \forall y F$		
$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$		
$\forall x F \vee \forall x G \equiv \forall x (F \vee G)$		
$\forall x F \wedge \forall x G \equiv \forall x (F \wedge G)$		
$\exists x F \vee \exists x G \equiv \exists x (F \vee G)$		
$\exists x F \wedge \exists x G \equiv \exists x (F \wedge G)$		