Syntax der Prädikatenlogik: Variablen, Terme

Eine *Variable* hat die Form x_i mit $i = 1, 2, 3 \ldots$.
Ein *Prädikatensymbol* hat die Form P_i^k und ein *Funktionssymbol* hat die Form f_i^k mit $i = 1, 2, 3 \ldots$ und $k = 0, 1, 2 \ldots$. Hierbei heißt i jeweils der *Unterscheidungsindex* und k die *Stellenzahl* (oder Stelligkeit). Wir definieren nun die *Terme* durch einen induktiven Prozeß:

(1) Jede Variable ist ein Term.

(2) Falls f ein Funktionssymbol mit der Stellenzahl k, und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.

Hierbei sollen auch Funktionssymbole der Stellenzahl 0 eingeschlossen sein, und in diesem Fall sollen die Klammern wegfallen. Nullstellige Funktionssymbole heißen auch *Konstanten*.

Formeln

Nun können wir (wiederum induktiv) definieren, was *Formeln* (der Prädikatenlogik) sind.

(1) Falls P ein Prädikatsymbol der Stelligkeit k ist, und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine Formel.

(2) Für jede Formel F ist auch $\neg F$ eine Formel.

(3) Für alle Formeln F und G sind auch $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.

(4) Falls x eine Variable ist und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln. Das Symbol $\exists$ wird *Existenzquantor* und $\forall$ *Allquantor* genannt.

Atomare Formeln nennen wir genau die, die gemäß 1. aufgebaut sin
Falls F eine Formel ist und F als Teil einer Formel G auftritt, so heißt F *Teilformel* von G.

Freie und gebundene Variablen, Aussagen

Alle Vorkommen von Variablen in einer Formel werden in *freie* und *gebundene* Vorkommen unterteilt. Dabei heißt ein Vorkommen der Variablen x in der Formel F gebunden, falls x in einer Teilformel von F der Form $\exists x G$ oder $\forall x G$ vorkommt. Andernfalls heißt dieses Vorkommen von x frei.
Eine Formel ohne Vorkommen einer freien Variablen heißt *geschlossen* oder eine *Aussage*.
Die *Matrix* einer Formel F ist diejenige Formel, die man aus F erhält, indem jedes Vorkommen von $\exists$ bzw. $\forall$, samt der dahinterstehenden Variablen gestrichen wird. Symbolisch bezeichnen wir die Matrix der Formel F mit F^*.

Aufgabe

NF: Nicht-Formel F: Formel, aber nicht Aussage A: Aussage

	NF	F	A
$\forall x P(a)$			
$\forall x \exists y (Q(x, y) \vee R(x, y))$			
$\forall x Q(x, x) \rightarrow \exists x Q(x, y)$			
$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x, x)$			
$\forall x (P(y) \wedge \forall y P(x))$			
$P(x) \rightarrow \exists x Q(x, P(x))$			
$\forall f\ \exists x P(f(x))$			

NF: Nicht-Formel F: Formel, aber nicht Aussage A: Aussage

	NF	F	A
$\forall x(\neg \forall y Q(x,y) \wedge R(x,y))$			
$\exists z(Q(z,x) \vee R(y,z)) \rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge Q(x,z))$			
$\exists x(\neg P(x) \vee P(f(a)))$			
$P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\exists x \forall y((P(y) \rightarrow Q(x,y)) \vee \neg P(x))$			
$\exists x \forall x Q(x,x)$			

Semantik der Prädikatenlogik: Strukture

Eine *Struktur* ist ein Paar $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ wobei $U_\mathcal{A}$ eine beliebige ab
nicht leere Menge ist, die die *Grundmenge* von $\mathcal{A}$ (oder der *Grundbereich*, der *Individuenbereich*, das *Universum*) genannt wird. Ferner ist $I_\mathcal{A}$ eine Abbildung, die

- jedem k–stelligen Prädikatensymbol P (das im Definitionsbereich von $I_\mathcal{A}$ liegt) ein k–stelliges Prädikat über U zuordnet,
- jedem k–stelligen Funktionssymbol f (das im Definitionsbereic von $I_\mathcal{A}$ liegt) eine k–stellige Funktion auf $U_\mathcal{A}$ zuordnet,
- jeder Variablen x (sofern $I_\mathcal{A}$ auf x definiert ist) ein Element de Grundmenge $U_\mathcal{A}$ zuordnet.

Sei F eine Formel und $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ eine Struktur. $\mathcal{A}$ heißt zu F *passend*, falls $I_\mathcal{A}$ für alle in F vorkommenden Prädikatsymbole, Funktionssymbole und freien Variablen definiert ist.

Mit anderen Worten, der Definitionsbereich von $I_\mathcal{A}$ ist eine Teilmenge von $\{P_i^k, f_i^k, x_i | i = 1,2,3,\ldots \ und \ k = 0,1,2.,\ldots\}$, und der Wertebereich von $I_\mathcal{A}$ ist eine Teilmenge aller Prädikate und Funktionen auf $U_\mathcal{A}$, sowie der Elemente von $U_\mathcal{A}$. Wir schreiben abkürzend statt $I_\mathcal{A}(P)$ einfach $P^\mathcal{A}$, statt $I_\mathcal{A}(f)$ einfach $f^\mathcal{A}$ und statt $I_\mathcal{A}(x)$ einfach $x^\mathcal{A}$.

Auswertung in einer Struktur

Sei F eine Formel und $\mathcal{A}$ eine zu F passende Struktur. Für jeden Term t, den man aus den Bestandteilen von F bilden kann (also aus den Variablen und Funktionssymbolen), definieren wir nun den *Wert* von t in der Struktur $\mathcal{A}$, den wir mit $\mathcal{A}(t)$ bezeichnen. Die Definitio ist wieder induktiv.

(1) Falls t eine Variable ist (also $t = x$), so ist $\mathcal{A}(t) = x^\mathcal{A}$.

(2) Falls t die Form hat $t = f(t_1,\ldots,t_k)$ wobei $t_1,\ldots,t_k$ Terme und f ein k–stelliges Funktionssymbol ist, so ist $\mathcal{A}(t) = f^\mathcal{A}(\mathcal{A}(t_1),\ldots,\mathcal{A}(t_k))$.

Der Fall 2 schließt auch die Möglichkeit ein, daß f nullstellig ist, als die Form hat $t = a$. In diesem Fall ist also $\mathcal{A}(t) = a^\mathcal{A}$.

Auf analoge Weise definieren wir (induktiv) den *(Wahrheits–) Wert* der Formeln F unter der Struktur $\mathcal{A}$, wobei wir ebenfalls die Bezeichnung $\mathcal{A}(F)$ verwenden.

- Falls F die Form hat $F = P(t_1, \ldots, t_k)$ mit den Termen $t_1, \ldots, t_k$ und k–stelligem Prädikatsymbol P, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in P^{\mathcal{A}} \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \neg G$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } \mathcal{A}(G) = 0 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = (G \wedge H)$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } \mathcal{A}(G) = 1 \textit{ und } \mathcal{A}(H) = 1 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = (G \vee H)$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } \mathcal{A}(G) = 1 \textit{ oder } \mathcal{A}(H) = 1 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \forall x G$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \textit{falls für alle } d \in U_{\mathcal{A}} \textit{ gilt}: \ \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \exists x G$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \textit{falls es ein } d \in U_{\mathcal{A}} \textit{ gibt mit}: \ \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

Hierbei bedeutet $\mathcal{A}_{[x/d]}$ diejenige Struktur $\mathcal{A}'$, die überall mit $\mathcal{A}$ identisch ist, bis auf die Definition von $x^{\mathcal{A}'}$. Es sei nämlich $x^{\mathcal{A}'} = d$, wobei $d \in U_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}'}$ — unabhängig davon, ob $I_{\mathcal{A}}$ auf x definiert ist oder nicht.

Modell, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Falls für eine Formel F und eine zu F passende Struktur $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}(F) = 1$, so schreiben wir wieder $\mathcal{A} \models F$.
Sprechweise: F *gilt* in $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{A}$ ist *Modell* für F.
Falls jede zu F passende Struktur ein Modell für F ist, so schreiben wir $\models F$, andernfalls $\not\models F$.
Sprechweise: F ist *(allgemein–)gültig*.
Falls es mindestens ein Modell für die Formel F gibt, so heißt F *erfüllbar*, andernfalls *unerfüllbar*.

Aufgabe

G: Gültig E: Erfüllbar, aber nicht gültig U: Unerfüllbar

	G	E	U
$\forall x P(a)$			
$\exists x(\neg P(x) \vee P(a))$			
$P(a) \rightarrow \exists x P(x)$			
$P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\forall x P(x) \wedge \neg \forall y P(y)$			

G: Gültig E: Erfüllbar, aber nicht gültig U: Unerfüllbar

	G	E	U
$\forall x(P(x,x) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y))$			
$\forall x \forall y(x = y \rightarrow f(x) = f(y))$			
$\forall x \forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$			
$\exists x \exists y \exists z(f(x) = y \wedge f(x) = z \wedge y \neq z)$			

Folgerung und Äquivalenz

Eine Formel G heißt eine *Folgerung* der Formeln $F_1, \ldots, F_k$ falls für jede Struktur, die sowohl zu $F_1, \ldots, F_k$ als auch zu G passend ist, gilt:

> Wenn $\mathcal{A}$ Modell von $\{F_1, \ldots, F_k\}$ ist, dann ist $\mathcal{A}$ auch Modell von G.

Wir schreiben $F_1, \ldots, F_k \models G$, falls G eine Folgerung von $F_1, \ldots, F_k$ ist.

Zwei Formeln F unf G heißen (*semantisch*) *äquivalent*, falls für alle Strukturen $\mathcal{A}$, die sowohl für F als auch für G passend sind, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$. Hierfür schreiben wir $F \equiv G$.

Aufgabe

(1) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x,x)$

(2) $\forall x(P(x) \vee Q(x,x))$

(3) $\forall x(\forall z P(z) \vee \forall y Q(x,y))$

	J	N
1. $\models$ 2.		
2. $\models$ 3.		
3. $\models$ 1.		

Aufgabe

(1) $\exists y \forall x P(x, y)$

(2) $\forall x \exists y P(x, y)$

	J	N
1. $\models$ 2.		
2. $\models$ 1.		

Aufgabe

	J	N
$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$		
$\forall x \exists y F \equiv \exists x \forall y F$		
$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$		
$\forall x F \vee \forall x G \equiv \forall x (F \vee G)$		
$\forall x F \wedge \forall x G \equiv \forall x (F \wedge G)$		
$\exists x F \vee \exists x G \equiv \exists x (F \vee G)$		
$\exists x F \wedge \exists x G \equiv \exists x (F \wedge G)$		