Hilbert-Kalkül (Einführung)

Es gibt viele verschiedene Kalküle, mit denen sich durch syntaktische Umformungen zeigen läßt, ob eine Formel gültig bzw. unerfüllbar ist.

Zwei Gruppen von Kalkülen:

- Kalküle als Grundlage von automatischen Verfahren
  $\rightsquigarrow$ Resolutionskalkül
- Kalküle, die mathematisches Schließen nachbilden
  $\rightsquigarrow$ Hilbert-Kalkül

Vergleich: Resolutionskalkül - Hilbert-Kalkül

Resolutionskalkül	Hilbert-Kalkül
zeigt Unerfüllbarkeit	zeigt Folgerung $(F_1, \ldots, F_n \models G)$
Formeln in KNF	Formeln mit $\neg$ und $\rightarrow$
Herleitung der leeren Klausel aus F	Herleitung von F aus Axiomen und Hypothesen
Anwendung: automatisches Beweisen	Anwendung: Modellierung mathematischen Schließens
Vollständigkeitsbeweis relativ einfach	Vollständigkeitsbeweis relativ komplex

Folgerung

Eine Formel G heißt eine *Folgerung* der Formeln $F_1, \ldots, F_k$ falls für jede Belegung, die sowohl zu $F_1, \ldots, F_k$ als auch zu G passend ist, gilt:

> Wenn $\mathcal{A}$ Modell von $\{F_1, \ldots, F_k\}$ ist, dann ist $\mathcal{A}$ auch Modell von G.

Wir schreiben $F_1, \ldots, F_k \models G$, falls G eine Folgerung von $F_1, \ldots, F_k$ ist.

Vorbemerkungen

Im folgenden: Formeln enthalten ausschließlich die Operatoren $\neg$ und $\rightarrow$. Denn $F \vee G \equiv \neg F \rightarrow G$ und $F \wedge G \equiv \neg(F \rightarrow \neg G)$.

Wir definieren den syntaktischen Ableitungsbegriff $\vdash$ $(F_1, \ldots, F_n \vdash G)$.

Ziel: Es soll gezeigt werden, dass

$$F_1, \ldots, F_n \vdash G \quad \text{gdw.} \quad F_1, \ldots, F_n \models G$$

(syntaktischer Ableitungsbegriff entspricht semantischem Folgerungsbegriff).

Axiomenschemata

Wir betrachten die folgenden fünf Axiomenschemata oder Axiome.

(1) $F \to (G \to F)$

(2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$

(3) $(\neg F \to \neg G) \to (G \to F)$

(4) $F \to (\neg F \to G)$

(5) $(\neg F \to F) \to F$

Eine Formel, die nach diesem Muster gebildet wird, heißt Instanz eines Axioms. Jede Instanz eines Axioms ist eine gültige Formel.

Beispiel: Instanz von Axiom (4) mit $F = \neg A \to B$, $G = \neg C$

$$(\neg A \to B) \to (\neg(\neg A \to B) \to \neg C)$$

Ableitung im Hilbert-Kalkül

Sei M eine Menge von Formeln - auch Menge von *Hypothesen* genannt - und F eine Formel.

Wir schreiben $M \vdash F$ und sagen F ist im Hilbert-Kalkül aus M herleitbar, genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

Axiom: F ist Instanz eines Axioms *oder*

Hypothese: $F \in M$ *oder*

Modus Ponens: es gilt $M \vdash G \to F$ und $M \vdash G$

Modus Ponens

Schlußregel des Kalküls:

$$\frac{\begin{array}{lcl} M & \vdash & G \to F \\ M & \vdash & G \end{array}}{\begin{array}{lcl} M & \vdash & F \end{array}}$$

Korrektheit und Vollständigkeit

Korrektheit: Folgt aus der Ableitbarkeit im Kalkül auch die semantische Folgerung?
Anders ausgedrückt: Folgt aus $M \vdash F$ stets $M \models F$?

Vollständigkeit: Folgt aus der semantischen Folgerung immer auch die Ableitbarkeit im Kalkül?
Anders ausgedrückt: Folgt aus $M \models F$ stets $M \vdash F$?

Korrektheit des Hilbert-Kalküls

Korrektheit: Sei F eine beliebige aussagenlogische Formel, M eine Menge von Formeln und es gelte $M \vdash F$. Dann folgt daraus auch $M \models F$.

Vorüberlegungen zum Vollständigkeitsbeweis

Wir wollen zeigen: Aus $M \models F$ folgt $M \vdash F$. Wie soll das funktionieren?

- Induktion über die Ableitung?
  $\leadsto$ es gibt gar keine Ableitung!
- Induktion über den Formelaufbau?
  Wir müßten beispielsweise beim Induktionsanfang für eine atomare Formel A zeigen:

  $M \models A$, daraus folgt $M \vdash A$.

  Wie kann man eine Ableitung von A aus M konstruieren?

Vollständigkeit - Beweisskizze (I)

(1) Es gilt $M \models F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist.

Vollständigkeit - Beweisskizze (I)

(1) Es gilt $M \models F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist.

(2) Definition (Inkonsistente Formelmenge): M heißt *inkonsistent*, wenn es eine Formel F gibt mit $M \vdash F$ und $M \vdash \neg F$.

Vollständigkeit - Beweisskizze (I)

(1) Es gilt $M \models F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist.

(2) Definition (Inkonsistente Formelmenge): M heißt *inkonsistent*, wenn es eine Formel F gibt mit $M \vdash F$ und $M \vdash \neg F$.

(3) Es gilt $M \vdash F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent ist. (Noch zu beweisen!)

Vollständigkeit - Beweisskizze (I)

(1) Es gilt $M \models F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist.

(2) Definition (Inkonsistente Formelmenge): M heißt *inkonsistent*, wenn es eine Formel F gibt mit $M \vdash F$ und $M \vdash \neg F$.

(3) Es gilt $M \vdash F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent ist. (Noch zu beweisen!)

(4) Jede unerfüllbare Formelmenge ist inkonsistent. Äquivalent dazu: Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar. (Noch zu beweisen!)

Vollständigkeit - Beweisskizze (I)

(1) Es gilt $M \models F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist.

(2) Definition (Inkonsistente Formelmenge): M heißt *inkonsistent*, wenn es eine Formel F gibt mit $M \vdash F$ und $M \vdash \neg F$.

(3) Es gilt $M \vdash F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent ist. (Noch zu beweisen!)

(4) Jede unerfüllbare Formelmenge ist inkonsistent. Äquivalent dazu: Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar. (Noch zu beweisen!)

Dann gilt: Aus $M \models F$ folgt $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar. Daraus folgt $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent. Und daraus folgt $M \vdash F$.

Vollständigkeit - Beweisskizze (I)

(1) Es gilt $M \models F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist.

(2) Definition (Inkonsistente Formelmenge): M heißt *inkonsistent*, wenn es eine Formel F gibt mit $M \vdash F$ und $M \vdash \neg F$.

(3) Es gilt $M \vdash F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent ist. (Noch zu beweisen!)

(4) Jede unerfüllbare Formelmenge ist inkonsistent. Äquivalent dazu: Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar. (Noch zu beweisen!)

Dann gilt: Aus $M \models F$ folgt $M \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar. Daraus folgt $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent. Und daraus folgt $M \vdash F$.

Im folgenden zeigen wir (3) und (4).

Konsistenz

Definition: Eine Menge M von Formeln heißt *konsistent*, falls es keine Formel F gibt, für die sowohl $M \vdash F$ als auch $M \vdash \neg F$ gilt.
Die Menge M heißt *inkonsistent*, falls sie nicht konsistent ist.

Beispiel: Inkonsistente Mengen

- $M_1 = \{A, \neg A\}$
- $M_2 = \{\neg(A \rightarrow (B \rightarrow A))\}$
- $M_3 = \{\neg B, \neg B \rightarrow B\}$
- $M_4 = \{C, \neg(\neg C \rightarrow D)\}$

Vorbereitung: das Deduktionstheorem

Satz: Es gilt $M \cup \{F\} \vdash G$ genau dann, wenn $M \vdash F \to G$.

Beweis: Wenn $M \vdash F \to G$ dann $M \cup \{F\} \vdash F \to G$. Mit $M \cup \{F\} \vdash F$ und Modus Ponens erhalten wir $M \cup \{F\} \vdash G$.
Es gelte nun $M \cup \{F\} \vdash G$. Induktion über die Ableitung:

Axiom/Hypothese: G Instanz eines Axioms oder $G \in M \cup \{F\}$.
Es gilt $M \vdash G$ und $M \vdash G \to (F \to G)$ (Axiom (1)). Modus Ponens ergibt $M \vdash F \to G$.

Modus Ponens: $M \cup \{F\} \vdash H \to G$, $M \cup \{F\} \vdash H$, und $M \cup \{F\} \vdash G$ wurde mit Modus Ponens hergeleitet.
Aus der IV folgt $M \vdash F \to (H \to G)$ und $M \vdash F \to H$. Mit Axiom (2) erhält man
$M \vdash (F \to (H \to G)) \to ((F \to H) \to (F \to G))$. Modus Ponens ergibt $M \vdash F \to G$.

Konsequenzen des Deduktionstheorems

Lemma: Seien F, G beliebige Formeln. Folgende Aussagen gelten im Hilbert-Kalkül:

(1) $F, \neg F \vdash G$

(2) $M \cup \{\neg F\} \vdash F$ genau dann, wenn $M \vdash F$

Beweis:

(1) Mit Axiom (4) erhalten wir $\vdash F \rightarrow (\neg F \rightarrow G)$. Zweimalige Anwendung des Deduktionstheorems ergibt dann $F, \neg F \vdash G$

(2) Wir nehmen zunächst an, dass $M \cup \{\neg F\} \vdash F$ gilt. Mit dem Deduktionstheorem folgt dann $M \vdash \neg F \rightarrow F$. Außerdem folgt mit Axiom (5), dass $M \vdash (\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$ gilt. Dann folgt $M \vdash F$ mit Hilfe des Modus Ponens.
Die umgekehrte Richtung ist trivial.

Vollständigkeit - Beweis von (3)

Lemma: Es gilt $M \vdash F$, genau dann, wenn $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent ist.

Beweis: Wir verwenden die Konsequenzen des Deduktionstheorems.
Wenn $M \vdash F$ dann auch $M \cup \{\neg F\} \vdash F$. Wegen $M \cup \{\neg F\} \vdash \neg F$ ist $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent.
Wenn $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent, dann gibt es eine Formel G mit $M \cup \{\neg F\} \vdash G$ und $M \cup \{\neg F\} \vdash \neg G$. Mit $G, \neg G \vdash F$ gilt $M \cup \{\neg F\} \vdash F$ und somit $M \vdash F$.

Vollständigkeit - Beweis von (4)

Wie zeigt man folgende Aussage?

Wenn M konsistent ist, dann ist M erfüllbar.

Vollständigkeit - Beweis von (4)

Wie zeigt man folgende Aussage?

Wenn M konsistent ist, dann ist M erfüllbar.

Antwort: Konstruktion einer erfüllenden Belegung $\mathcal{A}$.
Wenn $A \in M$ gilt, dann setzen wir $\mathcal{A}(A) = 1$.
Wenn $\neg A \in M$ gilt, dann setzen wir $\mathcal{A}(A) = 0$.

Vollständigkeit - Beweis von (4)

Wie zeigt man folgende Aussage?

Wenn M konsistent ist, dann ist M erfüllbar.

Antwort: Konstruktion einer erfüllenden Belegung $\mathcal{A}$.
Wenn $A \in M$ gilt, dann setzen wir $\mathcal{A}(A) = 1$.
Wenn $\neg A \in M$ gilt, dann setzen wir $\mathcal{A}(A) = 0$.

Problem: Was macht man, wenn weder $A \in M$, noch $\neg A \in M$ gilt?

Vielleicht kann man das Problem umgehen?

Definition: Eine Menge M von Formeln heißt maximal konsistent, falls sie konsistent ist und für jede Formel F gilt: $F \in M$ oder $\neg F \in M$.

Vielleicht kann man das Problem umgehen?

Definition: Eine Menge M von Formeln heißt maximal konsistent, falls sie konsistent ist und für jede Formel F gilt: $F \in M$ oder $\neg F \in M$.

Wir erweitern M daher zunächst zu einer maximal konsistenten Menge $\overline{M} \supseteq M$.

Vollständigkeit - Beweisskizze für (4)

(4) Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar.

Vollständigkeit - Beweisskizze für (4)

(4) Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar.

(4.1) Jede konsistente Menge kann zu einer maximal konsistenten Menge erweitert werden.

Vollständigkeit - Beweisskizze für (4)

(4) Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar.

(4.1) Jede konsistente Menge kann zu einer maximal konsistenten Menge erweitert werden.

(4.2) Sei M eine maximal konsistente Menge und sei $\mathcal{A}$ die Belegung mit $\mathcal{A}(A) = 1$ wenn $A \in M$ und $\mathcal{A}(A) = 0$ wenn $A \notin M$.
Die Belegung $\mathcal{A}$ erfüllt M.

Beweis von (4.1) - Vorbereitung

Lemma: Sei M eine konsistente Menge und sei F eine beliebige Formel. Dann gilt: $M \cup \{F\}$ konsistent oder $M \cup \{\neg F\}$ konsistent.

Beweis: Wir nehmen an, dass M konsistent ist und dass sowohl $M \cup \{F\}$ als auch $M \cup \{\neg F\}$ inkonsistent sind. Dann gilt $M \cup \{\neg F\} \vdash F$ und $M \cup \{F\} \vdash \neg F$. Damit gilt $M \vdash F$ und $M \vdash \neg F$. Damit ist M bereits inkonsistent, Widerspruch.

Beweis von (4.1)

Satz: Jede konsistente Menge M kann zu einer maximal konsistenten Menge erweitert werden.

Beweis: Sei $F_0, F_1, F_2 \ldots$ eine Aufzählung aller Formeln. Nehme $M_0 = M$ und

$$M_{i+1} = \begin{cases} M_i \cup \{F_i\} & \text{falls } M_i \cup \{F_i\} \text{ consistent} \\ M_i \cup \{\neg F_i\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Jede M_i is konsistent. Damit ist $\overline{M} = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ auch konsistent und maximal konsistent.

Beweis von (4.2) - Vorbereitung

Lemma: Für eine maximal konsistente Menge M gilt:

(1) Für alle Formeln F gilt $F \in M$ genau dann, wenn $M \vdash F$.

(2) Für alle Formeln F gilt $\neg F \in M$ genau dann, wenn $F \notin M$.

(3) Für zwei Formeln F, G gilt $F \rightarrow G \in M$ genau dann, wenn $F \notin M$ oder $G \in M$.

Beweis: Wir zeigen nur exemplarisch: wenn $F \notin M$ dann $F \rightarrow G \in M$. Mit $\neg F \in M$ erhalten wir folgende Ableitung:

1.	M	$\vdash$	$\neg F$	wegen $\neg F \in M$
2.	M	$\vdash$	$\neg F \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg F)$	Axiom (1)
3.	M	$\vdash$	$\neg G \rightarrow \neg F$	Modus Ponens aus 1. & 2.
4.	M	$\vdash$	$(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow G)$	Axiom (3)
5.	M	$\vdash$	$F \rightarrow G$	Modus Ponens aus 3. & 4.

Beweis von (4.2)

Satz: Jede konsistente Menge M ist erfüllbar.

Beweis: Sei $\overline{M} \supseteq M$ maximal konsistent. Definiere $\mathcal{A}$ wie folgt: $\mathcal{A}(A) = 1$ genau dann, wenn $A \in \overline{M}$. Wir zeigen für alle Formeln F: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $F \in \overline{M}$. Durch Induktion:

Atomare Formel: $F = A$ eine atomare Formel. Einfach.

Negation: $F = \neg G$. Es gilt $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(\neg G) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(G) = 0$ gdw. $G \notin \overline{M}$ gdw. $\neg G \in \overline{M}$ gdw. $F \in \overline{M}$.

Implikation: $F = F_1 \rightarrow F_2$. Es gilt $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F_1 \rightarrow F_2) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F_1) = 0$ oder $\mathcal{A}(F_2) = 1$ gdw. $F_1 \notin \overline{M}$ oder $F_2 \in \overline{M}$ gdw. $F_1 \rightarrow F_2 \in \overline{M}$ gdw. $F \in \overline{M}$.

Nachbemerkungen

- Die Axiome (4) und (5) sind nicht unbedingt notwendig, sie können aus den anderen drei Axiomen hergeleitet werden.
- Es gibt auch einen Hilbert-Kalkül für die Prädikatenlogik! (Prädikatenlogik: siehe nächstes Kapitel).