Resolution (Idee)

$$(F \vee A) \wedge (F' \vee \neg A) \equiv (F \vee A) \wedge (F' \vee \neg A) \wedge (F \vee F')$$

Aus der Herleitung der leeren Disjunktion ($=$ leere Klausel) folgt Unerfüllbarkeit.

Zwei Fragen:

- Kann man aus einer unerfüllbaren Formel immer die leere Klausel herleiten? (Vollständigkeit)
- Gibt es eine Möglichkeit, die Herleitung kompakter aufzuschreiben?

Mengendarstellung

- Klausel: Menge von Literalen (Disjunktion).

$$\{A, B\} \text{ stellt } (A \vee B) \text{ dar.}$$

- Formel: Menge von Klauseln (Konjunktion).

$$\{\{A, B\}, \{\neg A, B\}\} \text{ stellt } ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)) \text{ dar.}$$

Die leere Klausel (= leere Disjunktion) ist äquivalent zu einer unerfüllbaren Formel. Diese wird auch mit $\square$ bezeichnet.

Die leere Formel (= leere Konjunktion) ist äquivalent zu einer gültigen Formel.

Vorteile der Mengendarstellung

Man erhält automatisch:

- Kommutativität:
  $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$,
  beide dargestellt durch $\{A, B\}$
- Assoziativität:
  $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$,
  beide dargestellt durch $\{A, B, C\}$
- Idempotenz:
  $(A \vee A) \equiv A$,
  beide dargestellt durch $\{A\}$

Resolvent (I)

Definition: Seien K_1, K_2 und R Klauseln. Dann heißt R *Resolvent* von K_1 und K_2, falls es ein Literal L gibt mit $L \in K_1$ und $\overline{L} \in K_2$ und R die Form hat:

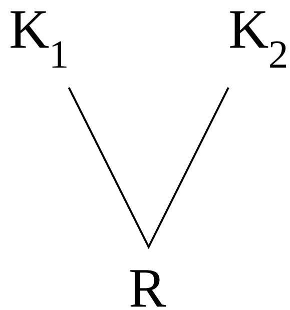
$$R = (K_1 - \{L\}) \cup (K_2 - \{\overline{L}\}).$$

Hierbei ist $\overline{L}$ definiert als

$$\overline{L} = \begin{cases} \neg A_i & \text{falls } L = A_i, \\ A_i & \text{falls } L = \neg A_i \end{cases}$$

Resolvent (II)

Wir stellen diesen Sachverhalt durch folgendes Diagramm dar (Sprechweise: R wird aus K_1, K_2 nach L resolviert).



Ferner: falls $K_1 = \{L\}$ und $K_2 = \{\overline{L}\}$, so entsteht die leere Menge als Resolvent. Diese wird mit dem speziellen Symbol $\square$ bezeichnet, das eine unerfüllbare Formel darstellt.

Resolutions-Lemma

Resolutions-Lemma: Sei F eine Formel in **KNF**, dargestellt als Klauselmenge. Ferner sei R ein Resolvent zweier Klauseln K_1 und K_2 in F. Dann sind F und $F \cup \{R\}$ äquivalent.

Beweis: Folgt direkt aus

$$\underbrace{(F_1 \vee A)}_{K_1} \wedge \underbrace{(F_2 \vee \neg A)}_{K_2} \equiv \underbrace{(F_1 \vee A)}_{K_1} \wedge \underbrace{(F_2 \vee \neg A)}_{K_2} \wedge \underbrace{(F_1 \vee F_2)}_{R}$$

Definition von $Res(F)$

Definition: Sei F eine Klauselmenge. Dann ist $Res(F)$ definiert als

$$Res(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvent zweier Klauseln in } F\}.$$

Außerdem setzen wir:

$$\begin{aligned} Res^0(F) &= F \\ Res^{n+1}(F) &= Res(Res^n(F)) \qquad \text{für } n \geq 0 \end{aligned}$$

und schließlich sei

$$Res^*(F) = \bigcup_{n \geq 0} Res^n(F).$$

Aufgabe

Angenommen, die Formel F enthält n atomare Formeln. Dann gilt für $Res^*(F)$:

A	$\lvert Res^*(F)\rvert \leq 2^n$	**B**	$\lvert Res^*(F)\rvert \leq 4^n$
C	$\lvert Res^*(F)\rvert$ kann beliebig groß werden		

Dabei bezeichnet $|Res^*(F)|$ die Anzahl der Elemente in $Res^*(F)$.

Resolutionssatz

Wir zeigen nun die Vollständigkeit der Resolution:

Resolutionssatz (der Aussagenlogik):
Eine Klauselmenge F ist unerfüllbar genau dann, wenn $\Box \in Res^*(F)$.

Beweisidee (I)

Induktion über die Anzahl der atomaren Formeln.

Hier: Induktionsschritt mit $n + 1 = 4$

$$F = \{\{A_1\}, \{\neg A_2, A_4\}, \{\neg A_1, A_2, A_4\}, \{A_3, \neg A_4\}, \{\neg A_1, \neg A_3, \neg A_4\}\}$$

Beweisidee (I)

Induktion über die Anzahl der atomaren Formeln.

Hier: Induktionsschritt mit $n + 1 = 4$

$$F = \{\{A_1\}, \{\neg A_2, \cancel{A_4}\}, \{\neg A_1, A_2, \cancel{A_4}\}, \cancel{\{A_3, \neg A_4\}}, \cancel{\{\neg A_1, \neg A_3, \neg A_4\}}\}$$

$$F_0 = \{\{A_1\}, \{\neg A_2\}, \{\neg A_1, A_2\}\}$$

Beweisidee (I)

Induktion über die Anzahl der atomaren Formeln.

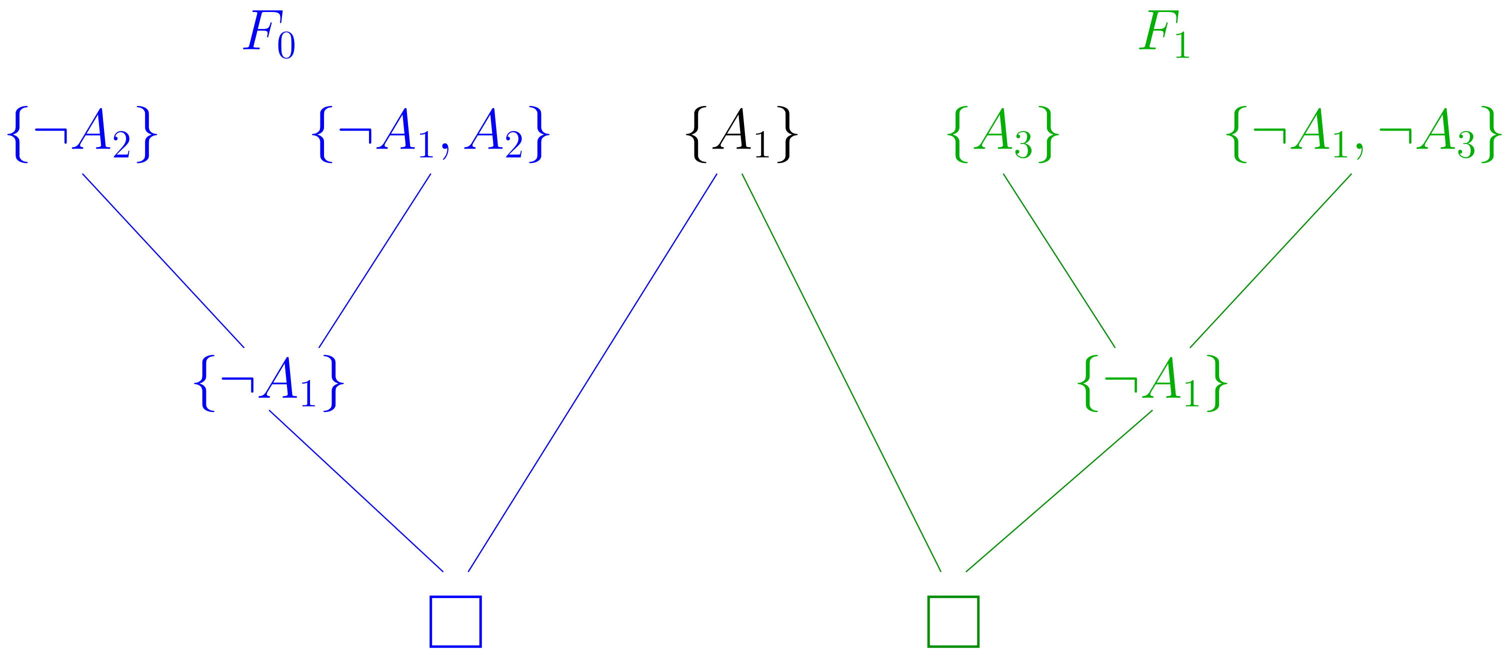
Hier: Induktionsschritt mit $n + 1 = 4$

$$F = \{\{A_1\}, \cancel{\{\neg A_2, A_4\}}, \cancel{\{\neg A_1, A_2, A_4\}}, \{A_3, \neg \cancel{A_4}\}, \{\neg A_1, \neg A_3, \neg \cancel{A_4}\}\}$$

$$F_0 = \{\{A_1\}, \{\neg A_2\}, \{\neg A_1, A_2\}\}$$

$$F_1 = \{\{A_1\}, \{A_3\}, \{\neg A_1, \neg A_3\}\}$$

Beweisidee (II)



Beweisidee (II)

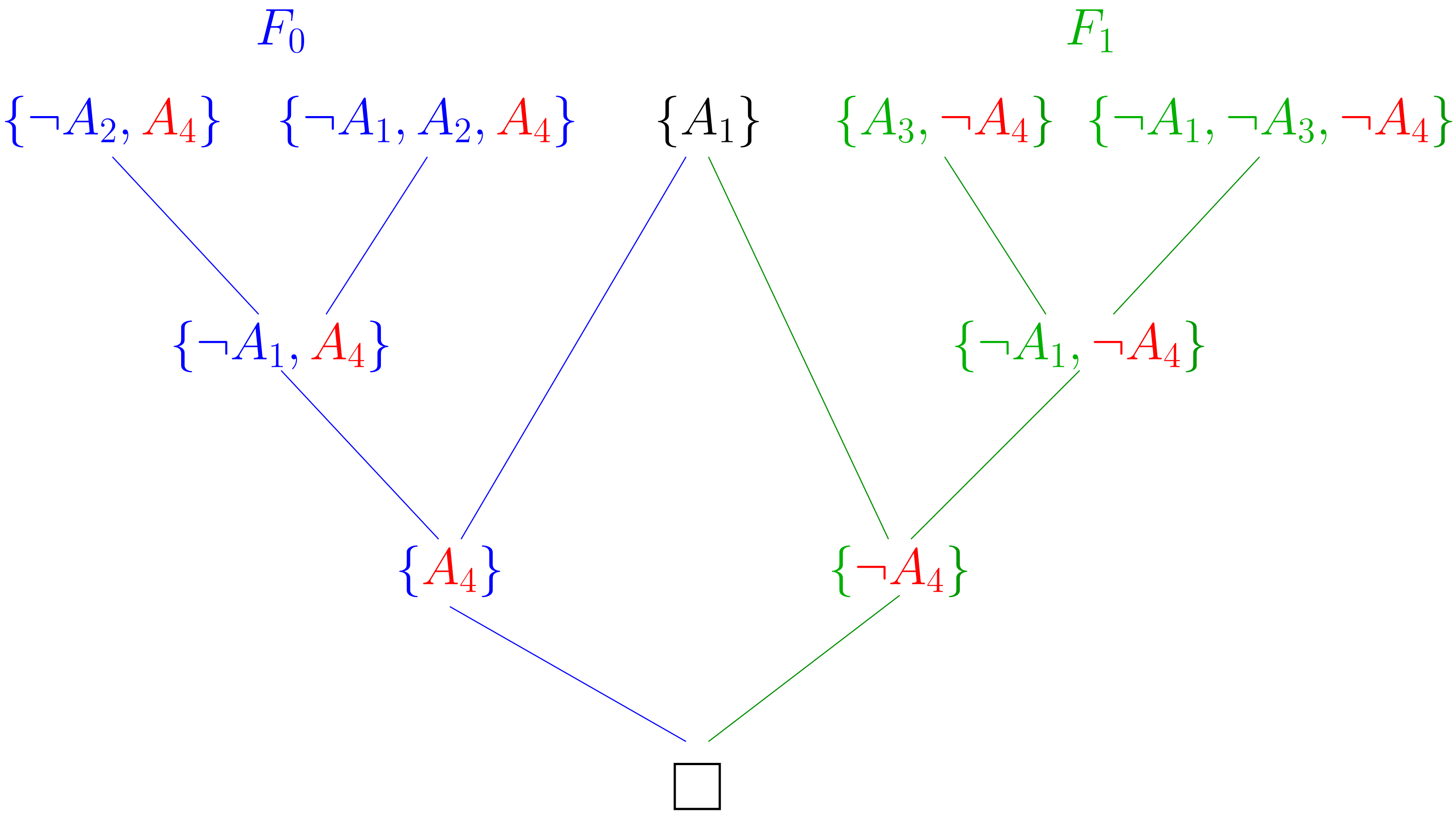
F_0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ F_1

$\{\neg A_2, A_4\}$ $\quad$ $\{\neg A_1, A_2, A_4\}$ $\quad$ $\{A_1\}$ $\quad$ $\{A_3, \neg A_4\}$ $\quad$ $\{\neg A_1, \neg A_3, \neg A_4\}$

$\{\neg A_1, A_4\}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\{\neg A_1, \neg A_4\}$

$\{A_4\}$ $\qquad\qquad$ $\{\neg A_4\}$

Beweisidee (II)



Definition

Eine *Deduktion* (oder *Herleitung* oder *Beweis*) der leeren Klausel aus einer Klauselmenge F ist eine Folge von $K_1, K_2, \ldots, K_m$ von Klauseln mit folgenden Eigenschaften:

> K_m ist die leere Klausel und für jedes $i = 1, \ldots, m$ gilt, daß K_i entweder Element von F ist oder aus gewissen Klauseln K_a,K_b mit $a, b < i$ resolviert werden kann.

Eine Klauselmenge ist unerfüllbar genau dann, wenn eine Deduktion der leeren Klausel existiert.

Resolutionskalkül

Mit dem Begriff *Kalkül* bezeichnet man eine Menge von *syntaktischen* Umformungsregeln, mit denen man *semantische* Eigenschaften herleiten kann.

- Syntaktische Umformungsregeln: Resolution, Stopp bei Erreichen der leeren Klausel
- Semantische Eigenschaft: Unerfüllbarkeit

Wünschenswerte Eigenschaften eines Kalküls:

- Korrektheit: Wenn die leere Klausel aus F abgeleitet werden kann, dann ist F unerfüllbar.
- Vollständigkeit: Wenn F unerfüllbar ist, dann ist die leere Klausel aus F ableitbar.

Beispiel

Wir wollen zeigen, daß

$$((AK \vee BK) \wedge (AK \rightarrow BK) \wedge (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK) \wedge RL) \rightarrow (\neg AK \wedge BK)$$

gültig ist. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$(AK \vee BK) \wedge (\neg AK \vee BK) \wedge (\neg BK \vee \neg RL \vee \neg AK) \wedge RL \wedge (AK \vee \neg BK)$$

unerfüllbar ist. (Wegen: $F \rightarrow G$ gültig gdw. $F \wedge \neg G$ unerfüllbar.)