

# Erfüllbarkeit und Gültigkeit in DNF und KNF

**Erfüllbarkeit** ist leicht (lösbar in linearer Zeit) für Formeln in **DNF**

Eine Formel in DNF ist erfüllbar genau dann, wenn es eine Konjunktion gibt, die nicht gleichzeitig  $A$  und  $\neg A$  für eine atomare Formel  $A$  enthält.

Erfüllbar:  $(\neg B \wedge A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$

Nicht erfüllbar:  $(A \wedge \neg A \wedge B) \vee (C \wedge \neg C)$

**Gültigkeit** ist leicht (lösbar in linearer Zeit) für Formeln in **KNF**

Eine Formel in KNF ist gültig genau dann, wenn jede Disjunktion gleichzeitig  $A$  und  $\neg A$  für eine atomare Formel  $A$  enthält. (Oder es handelt sich um die leere Konjunktion.)

Gültig:  $(A \vee \neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg C)$

Nicht gültig:  $(A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee C)$

# Effiziente Erfüllbarkeitstests

Im folgenden:

- Ein sehr effizienter Erfüllbarkeitstest für eine spezielle Klasse von Formeln, sogenannte **Hornformeln**
- Ein im allgemeinen effizienter Unerfüllbarkeitstest für Formeln in KNF (**Resolution**)

# Hornformel

Eine Formel  $F$  ist eine **Hornformel**, falls  $F$  in **KNF** ist, und jede Klausel in  $F$  höchstens ein positives Literal enthält.

Notation:

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \text{ wird zu } (A \wedge B \rightarrow C)$$

$$(\neg A \vee \neg B) \text{ wird zu } (A \wedge B \rightarrow 0)$$

$$A \text{ wird zu } (1 \rightarrow A)$$

0: steht für eine beliebige unerfüllbare Formel

1: steht für eine beliebige gültige Formel

# Erfüllbarkeitstest für Hornformeln

Eingabe: eine Hornformel  $F$ .

- (1) Versehe jedes Vorkommen einer atomaren Formel  $A$  in  $F$  mit einer Markierung, falls es in  $F$  eine Teilformel der Form  $(1 \rightarrow A)$  gibt;
- (2) **while** es gibt in  $F$  eine Teilformel  $G$  der Form  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B)$  oder  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow 0)$ ,  $k \geq 1$ , wobei  $A_1, \dots, A_k$  bereits markiert sind und  $B$  noch nicht markiert ist  
**do**:
  - if**  $G$  hat die erste Form, **then** markiere jedes Vorkommen von  $B$
  - else** gib “unerfüllbar” aus und stoppe;
- (3) Gib “erfüllbar” aus und stoppe.

# Induktionsprinzip

Um die Aussage

Für jedes  $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  gilt  $P(n)$ .

zu zeigen, gehen wir im allgemeinen folgendermaßen vor:

- Wir zeigen, daß  $P(0)$  gilt. (Induktionsanfang)
- Wir zeigen, daß für jedes  $n$  gilt:  
Wenn  $P(n)$  gilt, dann gilt auch  $P(n + 1)$ . (Induktionsschritt)

Dann kann man schließen, daß  $P(n)$  für jedes beliebige  $n$  gilt.

**Anwendung:** Beweis, dass eine Bedingung während des Ablaufs eines Algorithmus immer erfüllt ist (Invariante). Hierzu zeigt man durch Induktion, daß die Bedingung nach  $n$  beliebigen Schritten gilt.

# Korrektheit des Markierungsalgorithmus

**Satz:** Der Markierungsalgorithmus ist korrekt und terminiert immer nach spätestens  $n$  Markierungsschritten.

Dabei ist  $n$  die Anzahl der atomaren Formeln in  $F$ .

# Beispiel: MYCIN

**MYCIN:** Expertensystem zur Untersuchung von Blutinfektionen  
(entwickelt in den 70er Jahren)

**Beispiel:**

IF the infection is primary-bacteremia

AND the site of the culture is one of the  
sterile sites

AND the suspected portal of entry is the  
gastrointestinal tract

THEN there is suggestive evidence (0.7) that  
infection is bacteroid.