Erfüllbarkeit und Gültigkeit in DNF und KNF

Erfüllbarkeit ist leicht (lösbar in linearer Zeit) für Formeln in DNF

> Eine Formel in DNF ist erfüllbar genau dann, wenn es eine Konjunktion gibt, die nicht gleichzeitig A und $\neg A$ für eine atomare Formel A enthält.

Erfüllbar: $(\neg B \wedge A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$
Nicht erfüllbar: $(A \wedge \neg A \wedge B) \vee (C \wedge \neg C)$

Gültigkeit ist leicht (lösbar in linearer Zeit) für Formeln in KNF

> Eine Formel in KNF ist gültig genau dann, wenn jede Disjunktion gleichzeitig A und $\neg A$ für eine atomare Formel A enthält. (Oder es handelt sich um die leere Konjunktion.)

Gültig: $(A \vee \neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg C)$
Nicht gültig: $(A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee C)$

Erfüllbarkeitstests für KNF-Formel

Im folgenden:

- Ein sehr effizienter Erfüllbarkeitstest für eine spezielle Klasse von KNF-Formeln, sogenannte Hornformeln
- Ein im allgemeinen effizienter Unerfüllbarkeitstest für Formeln in KNF (Resolution)

Hornformel

Eine Formel F ist eine Hornformel, falls F in **KNF** ist, und jede Klausel in F höchstens ein positives Literal enthält.
Notation:

$$\begin{array}{rcl} (\neg A \vee \neg B \vee C) & \text{wird zu} & (A \wedge B \rightarrow C) \\ (\neg A \vee \neg B) & \text{wird zu} & (A \wedge B \rightarrow 0) \\ A & \text{wird zu} & (1 \rightarrow A) \end{array}$$

0: steht für eine beliebige unerfüllbare Formel
1: steht für eine beliebige gültige Formel

Erfüllbarkeitstest für Hornformeln

Eingabe: eine Hornformel F.

(1) Versehe jedes Vorkommen einer atomaren Formel A in F mit einer Markierung, falls es in F eine Teilformel der Form $(1 \rightarrow A)$ gibt;

(2) **while** es gibt in F eine Teilformel G der Form $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$ oder $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow 0)$, $k \geq 1$, wobei $A_1, \ldots, A_k$ bereits markiert sind und B noch nicht markiert ist **do**:

> **if** G hat die erste Form, **then** markiere jedes Vorkommen von B
> **else** gib "unerfüllbar" aus und stoppe;

(3) Gib "erfüllbar" aus und stoppe.

Induktionsprinzip

Um die Aussage

Für jedes $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ gilt $P(n)$.

zu zeigen, gehen wir im allgemeinen folgendermaßen vor:

- Wir zeigen, daß $P(0)$ gilt. (Induktionsanfang)
- Wir zeigen, daß für jedes n gilt:
  Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n+1)$. (Induktionsschritt)

Dann kann man schließen, daß $P(n)$ für jedes beliebige n gilt.

Anwendung: Beweis, dass eine Bedingung während des Ablaufs eines Algorithmus immer erfüllt ist (Invariante). Hierzu zeigt man durch Induktion, daß die Bedingung nach n beliebigen Schritten gilt.

Korrektheit des Markierungsalgorithmus

Satz: Der Markierungsalgorithmus ist korrekt und terminiert immer nach spätestens n Markierungschritten.

Dabei ist n die Anzahl der atomaren Formeln in F.

Beispiel: MYCIN

MYCIN: Expertensystem zur Untersuchung von Blutinfektionen (entwickelt in den 70er Jahren)

Beispiel:

```
IF the infection is pimary-bacteremia
AND the site of the culture is one of the
       sterile sites
AND the suspected portal of entry is the
       gastrointestinal tract
THEN there is suggestive evidence (0.7) that
       infection is bacteroid.
```