Äquivalenz

Zwei Formeln F und G heißen (*semantisch*) *äquivalent*, falls für alle Belegungen $\mathcal{A}$, die sowohl für F als auch für G passend sind, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$. Hierfür schreiben wir $F \equiv G$.

Aufgabe

Gelten die folgenden Äquivalenzen?

$$
\begin{aligned}
(A \wedge (A \vee B)) &\equiv A \\
\neg(A \vee B) &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \\
(A \wedge (B \vee C)) &\equiv ((A \wedge B) \vee C) \\
(A \wedge (B \vee C)) &\equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))
\end{aligned}
$$

Die Hauptprobleme

- Modellprüfung
  Sei F eine Formel und sei $\mathcal{A}$ eine passende Belegung. Gilt $\mathcal{A}(F) = 1$?
- Erfüllbarkeit
  Sei F eine Formel. Ist F erfüllbar ?
- Gültigkeit
  Sei F eine Formel. Ist F gültig ?
- Folgerung
  Seien F und G Formeln. Gilt $F \models G$?
- Äquivalenz
  Seien F und G Formeln. Gilt $F \equiv G$?

Aufgabe

Es gelten die folgenden Aussagen:

Wenn	$(F \rightarrow G)$ gültig	dann	$F \models G$
Wenn	$F \models G$	dann	$(F \rightarrow G)$ gültig
Wenn	$(F \leftrightarrow G)$ gültig	dann	$F \equiv G$
Wenn	$F \equiv G$	dann	$(F \leftrightarrow G)$ gültig

Reduktion von Problemen (I)

Welche Probleme lassen sich auf welche reduzieren?

- Gültigkeit $\Longleftrightarrow$ (Nicht)Erfüllbarkeit:

$$F \text{ gültig} \quad \text{gdw.} \quad \neg F \text{ nicht erfüllbar}$$
$$F \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \neg F \text{ nicht gültig}$$

- Gültigkeit $\Longrightarrow$ Folgerung:

$$F \text{ gültig} \quad \text{gdw.} \quad T \models F \quad (T \text{ ist beliebige gültige Formel})$$

- Folgerung $\Longrightarrow$ Gültigkeit:

$$F \models G \quad \text{gdw.} \quad F \rightarrow G \text{ gültig}$$

Reduktion von Problemen (II)

- Gültigkeit $\Longrightarrow$ Äquivalenz:

  F gültig gdw. $F \equiv T$ (T ist beliebige gültige Formel)

- Äquivalenz $\Longrightarrow$ Gültigkeit:

  $F \equiv G$ gdw. $F \leftrightarrow G$ gültig

Eigenschaften der Äquivalenz

reflexiv: Es gilt $F \equiv F$ für jede Formel F (jede Formel ist zu sich selbst äquivalent)

symmetrisch: Falls $F \equiv G$ gilt, so gilt auch $G \equiv F$

transitiv: Falls $F \equiv G$ und $G \equiv H$ gilt, so gilt auch $F \equiv H$

abgeschlossen unter Operatoren: Falls $F_1 \equiv F_2$ und $G_1 \equiv G_2$ gilt, so gilt auch $(F_1 \wedge G_1) \equiv (F_2 \wedge G_2)$, $(F_1 \vee G_1) \equiv (F_2 \vee G_2)$ und $\neg F_1 \equiv \neg F_2$.

Reflexive, symmetrische, transitive Relation $=$ Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation $+$ Abgeschlossenheit unter

Operatoren $=$ Kongruenzrelation

Ersetzbarkeitstheorem

Die Abgeschlossenheit läßt sich auch folgendermaßen formulieren:

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F. Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Äquivalenzen (I)

Satz

Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{array}{rclr}
(F \wedge F) & \equiv & F & \\
(F \vee F) & \equiv & F & \text{(Idempotenz)} \\
(F \wedge G) & \equiv & (G \wedge F) & \\
(F \vee G) & \equiv & (G \vee F) & \text{(Kommutativität)} \\
((F \wedge G) \wedge H) & \equiv & (F \wedge (G \wedge H)) & \\
((F \vee G) \vee H) & \equiv & (F \vee (G \vee H)) & \text{(Assoziativität)} \\
(F \wedge (F \vee G)) & \equiv & F & \\
(F \vee (F \wedge G)) & \equiv & F & \text{(Absorption)}
\end{array}
$$

Äquivalenzen (II)

$$
\begin{array}{rcll}
(F \wedge (G \vee H)) & \equiv & ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) & \\
(F \vee (G \wedge H)) & \equiv & ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) & \text{(Distributivität)} \\
\neg\neg F & \equiv & F & \text{(Doppelnegation)} \\
\neg(F \wedge G) & \equiv & (\neg F \vee \neg G) & \\
\neg(F \vee G) & \equiv & (\neg F \wedge \neg G) & \text{(deMorgansche Regeln)} \\
(F \vee G) & \equiv & F, \text{ falls } F \text{ Tautologie} & \\
(F \wedge G) & \equiv & G, \text{ falls } F \text{ Tautologie} & \text{(Tautologieregeln)} \\
(F \vee G) & \equiv & G, \text{ falls } F \text{ unerfüllbar} & \\
(F \wedge G) & \equiv & F, \text{ falls } F \text{ unerfüllbar} & \text{(Unerfüllbarkeitsregeln)}
\end{array}
$$

Normalformen (I)

Definition (Normalformen)
Ein *Literal* ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel. (Im ersten Fall sprechen wir von einem *positiven*, im zweiten Fall von einem *negativen* Literal).

Eine Formel F ist in *konjunktiver Normalform* (**KNF**), falls sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist:

$$F = (\bigwedge_{i=1}^{n} (\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j})),$$

wobei $L_{i,j} \in \{A_1, A_2, \cdots\} \cup \{\neg A_1, \neg A_2, \cdots\}$

Normalformen (II)

Eine Formel F ist in *disjunktiver Normalform* (**DNF**), falls sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist:

$$F = (\bigvee_{i=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j})),$$

wobei $L_{i,j} \in \{A_1, A_2, \cdots\} \cup \{\neg A_1, \neg A_2, \cdots\}$

Umformungsmethode

Gegeben: eine Formel F.

1. Ersetze in F jedes Vorkommen einer Teilformel der Bauart

$$\begin{array}{rcl} \neg\neg G & \text{durch} & G \\ \neg(G \wedge H) & \text{durch} & (\neg G \vee \neg H) \\ \neg(G \vee H) & \text{durch} & (\neg G \wedge \neg H) \end{array}$$

   bis keine derartige Teilformel mehr vorkommt.

2. Ersetze jedes Vorkommen einer Teilformel der Bauart

$$\begin{array}{rcl} (F \vee (G \wedge H)) & \text{durch} & ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) \\ ((F \wedge G) \vee H) & \text{durch} & ((F \vee H) \wedge (G \vee H)) \end{array}$$

   bis keine derartige Teilformel mehr vorkommt.

Ablesen aus Wahrheitstafel

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

DNF: Aus jeder Zeile mit Wahrheitswert 1 wird eine Konjunktion, aus einer 0 in der Spalte A wird $\neg A$, aus einer 1 wird A

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$
$$\vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

KNF: Aus jeder Zeile mit Wahrheitswert 0 wird eine Disjunktion, aus einer 0 in der Spalte A wird A, aus einer 1 wird $\neg A$

$$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$$
$$\wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

Mengendarstellung

- Klausel: Menge von Literalen (Disjunktion).

$$\{A, B\} \text{ stellt } (A \vee B) \text{ dar.}$$

- Formel: Menge von Klauseln (Konjunktion).

$$\{\{A, B\}, \{\neg A, B\}\} \text{ stellt } ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)) \text{ dar.}$$

Die leere Klausel ist äquivalent zu einer unerfüllbaren Formel.
Die leere Formel ist äquivalent zu einer gültigen Formel.

Präzedenzen

Präzedenz der Operatoren:

$\leftrightarrow$	bindet am schwächsten
$\rightarrow$	...
$\vee$	...
$\wedge$	...
$\neg$	bindet am stärksten

Es gilt also:

$$A \leftrightarrow B \vee \neg C \rightarrow D \wedge \neg E \equiv (A \leftrightarrow ((B \vee \neg C) \rightarrow (D \wedge \neg E)))$$

Dennoch: Zu viele Klammern schaden i.a. nicht