Mengen und Funktionen (I)

Menge: Menge M von Elementen, wird beschrieben als Aufzählung

$$M = \{A_1, A_2, A_3, A_7\}$$

oder als Menge von Elementen mit einer bestimmten Eigenschaft

$$M = \{A_i \mid 1 \leq i \leq 3 \text{ oder } i = 7\}.$$

Element einer Menge: Wir schreiben $a \in M$, falls ein Element a in der Menge M enthalten ist.

Teilmengenbeziehung: Wir schreiben $A \subseteq B$, falls jedes Element von A auch in B enthalten ist. Die Relation $\subseteq$ heißt auch Inklusion.

Mengen und Funktionen (II)

Funktion:

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

Die Funktion f bildet ein Element $a \in A$ auf ein Element $f(a) \in B$ ab.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & f\colon \{A_1, A_2, A_3, A_7\} \longrightarrow \{0, 1\} \\ & A_1 \mapsto 0,\ A_2 \mapsto 1,\ A_3 \mapsto 0,\ A_7 \mapsto 1 \\ \text{Alternativ:}\quad & f(A_1) = 0,\ f(A_2) = 1,\ f(A_3) = 0,\ f(A_7) = 1 \end{aligned}$$

Syntax der Aussagenlogik

Eine *atomare Formel* hat die Form A_i (wobei $i = 1, 2, 3, \ldots$).
Formeln werden durch folgenden induktiven Prozeß definiert:

1. Alle atomaren Formeln sind Formeln
2. Für alle Formeln F und G sind $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.
3. Für jede Formel F ist $\neg F$ eine Formel.

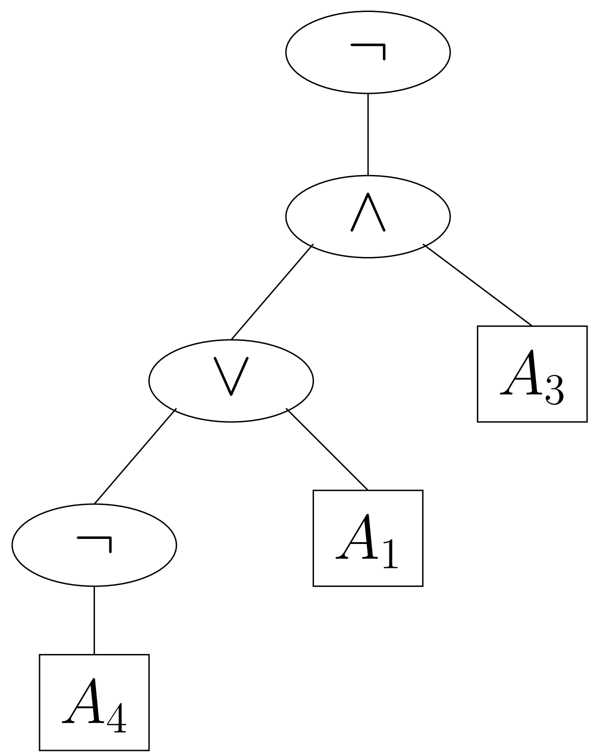
Sprechweise:

- $(F \wedge G)$: F und G, Konjunktion von F und G
- $(F \vee G)$: F oder G, Disjunktion von F und G
- $\neg F$: nicht F, Negation von F

Formel als Syntaxbaum

Jede Formel kann auch durch einen *Syntaxbaum* dargestellt werden.

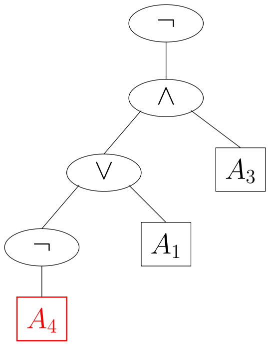
Beispiel: $F = \neg((\neg A_4 \vee A_1) \wedge A_3)$



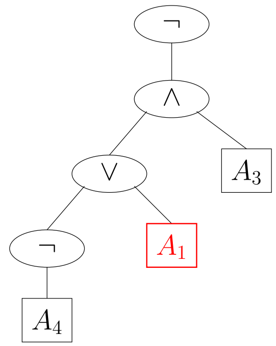
Teilformel

Die *Teilformeln* einer Formel F entsprechen dann den Teilbäumen.

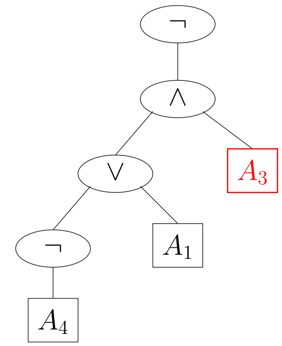
A_4



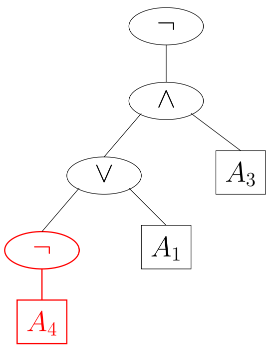
A_1



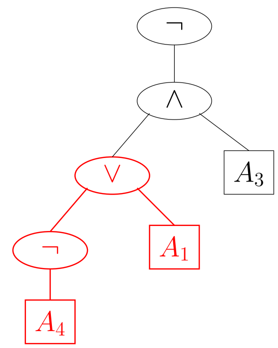
A_3



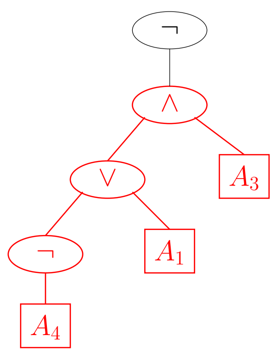
$\neg A_4$



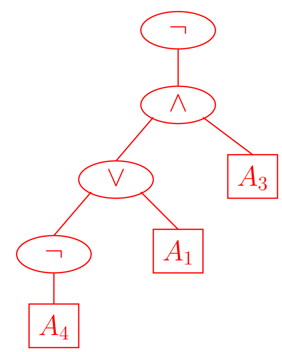
$(\neg A_4 \vee A_1)$



$((\neg A_4 \vee A_1) \wedge A_3)$



$\neg((\neg A_4 \vee A_1) \wedge A_3)$



Semantik der Aussagenlogik (I)

Die Elemente der Menge $\{0, 1\}$ heißen *Wahrheitswerte*.

Eine *Belegung* ist eine Funktion $\mathcal{A}\colon D \to \{0, 1\}$, wobei D eine Teilmenge der atomaren Formeln ist.

Wir erweitern $\mathcal{A}$ zu einer Funktion $\hat{\mathcal{A}}\colon E \to \{0, 1\}$, wobei $E \supseteq D$ die Menge aller Formeln ist, die nur aus den atomaren Formeln in D aufgebaut sind.

Semantik der Aussagenlogik (II)

$$\hat{\mathcal{A}}(A) = \mathcal{A}(A) \quad \text{falls } A \in D \text{ eine atomare Formel ist}$$

$$\hat{\mathcal{A}}((F \wedge G)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \hat{\mathcal{A}}(F) = 1 \text{ und } \hat{\mathcal{A}}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{\mathcal{A}}((F \vee G)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \hat{\mathcal{A}}(F) = 1 \text{ oder } \hat{\mathcal{A}}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{\mathcal{A}}(\neg F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \hat{\mathcal{A}}(F) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir schreiben $\mathcal{A}$ statt $\hat{\mathcal{A}}$.

Verknüpfungstafeln (I)

Berechnung von $\hat{\mathcal{A}}$ mit Hilfe von *Verknüpfungstafeln*, auch *Wahrheitstafeln* genannt.

Beobachtung: Der Wert $\hat{\mathcal{A}}(F)$ hängt nur davon ab, wie $\mathcal{A}$ auf den den in F vorkommenden atomaren Formeln definiert ist.

Tafeln für die Operatoren $\vee$, $\wedge$, $\neg$:

A	B	A	$\vee$	B
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1

A	B	A	$\wedge$	B
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

A	$\neg$	A
0	1	0
1	0	1

Abkürzungen

A, B, C oder

P, Q, R oder ... statt $A_1, A_2, A_3 \ldots$

$(F_1 \rightarrow F_2)$ statt $(\neg F_1 \vee F_2)$

$(F_1 \leftrightarrow F_2)$ statt $((F_1 \wedge F_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2))$

$(\bigvee_{i=1}^{n} F_i)$ statt $(\ldots((F_1 \vee F_2) \vee F_3) \vee \ldots \vee F_n)$

$(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i)$ statt $(\ldots((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \wedge \ldots \wedge F_n)$

Verknüpfungstafeln (II)

Tafeln für die Operatoren $\rightarrow$, $\leftrightarrow$:

A	B	A	$\rightarrow$	B
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Name: *Implikation*

Interpretation: Wenn A gilt, dann muß auch B gelten.

A	B	A	$\leftrightarrow$	B
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Name: *Äquivalenz*

Interpretation: A gilt genau dann, wenn B gilt.

Achtung!!!

$A \rightarrow B$ sagt nicht, dass A eine Ursache für B ist.

"Pinguine schwimmen $\rightarrow$ Pferde wiehern"
ist wahr (in unserer Welt).

$A \rightarrow B$ sagt nichts darüber, ob A wahr oder falsch ist.

"Frau Merkel ist bestechlich $\rightarrow$ Frau Merkel gehört hinter Gitter"
ist wahr (in unserer Welt).

Eine falsche Aussage impliziert alles.

"Pinguine fliegen $\rightarrow$ Herr Müntefering ist ein Verbrecher"
ist wahr (in unserer Welt).

Formalisierung natürlicher Sprache (I)

Ein Gerät besteht aus einem Bauteil A, einem Bauteil B und einem roten Licht. Folgendes ist bekannt:

- Bauteil A oder Bauteil B (oder beide) sind kaputt.
- Wenn Bauteil A kaputt ist, dann ist auch Bauteil B kaputt.
- Wenn Bauteil B kaputt ist und das rote Licht leuchtet, dann ist Bauteil A nicht kaputt.
- Das rote Licht leuchtet.

Formalisieren Sie diese Situation als aussagenlogische Formel und stellen Sie die Wahrheitstafel zu dieser Formel auf. Verwenden Sie dazu folgende atomare Formeln: RL (rotes Licht leuchtet), AK (Bauteil A kaputt), BK (Bauteil B kaputt)

Formalisierung natürlicher Sprache (II)

Gesamte Wahrheitstafel:

RL	AK	BK	$((AK \vee BK) \wedge (AK \to BK)) \wedge ((BK \wedge RL) \to \neg AK)) \wedge RL$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Formalisierung natürlicher Sprache (III)

Formalisieren Sie das Sudoku-Problem:

4				9				2
		1				5		
	9		3	4	5		1	
		8				2	5	
7		5		3		4	6	1
	4	6				9		8
	6		1	5	9		8	
		9				6		
5				7				4

Verwenden Sie dazu eine atomare Formel X_{YZ} für jede Tripel $(X, Y, Z) \in \{1, \ldots, 9\}^3$:

$$X_{YZ} = \text{Auf der Zeile } Y\text{, Spalte } Z \text{ liegt die Zahl } X.$$

Beispiel: In der erste Zeile stehen alle Zahlen von 1 bis 9

$$\bigwedge_{X=1}^{9} \left(\bigvee_{Z=1}^{9} X_{1Z} \right)$$

Die Wahrheitstabelle hat

$$\begin{aligned} 2^{729} \quad = \quad & 28240139587082174969491088422046278633513539118 5\\ & 1577524683401930862693830361198499905873920995 22\\ & 9996970897865498283996578123296865878390947626 55\\ & 3088486946106430796091482716120572632072492703 52\\ & 77237573594788345303657349 12 \end{aligned}$$

Zeilen.

Modelle

Sei F eine Formel und $\mathcal{A}$ eine Belegung.
Falls $\mathcal{A}$ für alle in F vorkommenden atomaren Formeln definiert ist so heißt $\mathcal{A}$ zu F *passend*.

Sei $\mathcal{A}$ passend zu F:

Falls $\mathcal{A}(F) = 1$	so schreiben wir	$\mathcal{A} \models F$
	und sagen	F *gilt unter* $\mathcal{A}$
	oder	$\mathcal{A}$ *ist ein Modell für* F
Falls $\mathcal{A}(F) = 0$	so schreiben wir	$\mathcal{A} \not\models F$
	und sagen	F *gilt nicht unter* $\mathcal{A}$
	oder	$\mathcal{A}$ *ist kein Modell für* F

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Erfüllbarkeit: Eine Formel F heißt *erfüllbar*, falls F mindestens ein Modell besitzt, andernfalls heißt F *unerfüllbar*.
Eine (endliche oder unendliche!) Menge von Formeln M heißt *erfüllbar*, falls es eine Belegung gibt, die für jede Formel in M ein Modell ist.

Gültigkeit: Eine Formel F heißt *gültig* (oder *allgemeingültig* oder *Tautologie*) falls jede zu F passende Belegung ein Modell für F ist. Wir schreiben $\models F$, falls F gültig ist, und $\not\models F$ sonst.

Aufgabe

	Gültig	Erfüllbar	Unerfüllbar
A			
$A \vee B$			
$A \vee \neg A$			
$A \wedge \neg A$			
$A \rightarrow \neg A$			
$A \rightarrow B$			
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$			
$A \rightarrow (A \rightarrow B)$			
$A \leftrightarrow \neg A$			

Aufgabe

Gelten die folgenden Aussagen?

				J/N	Gegenb.
Wenn	F gültig,	dann	F erfüllbar		
Wenn	F erfüllbar,	dann	$\neg F$ unerfüllbar		
Wenn	F gültig,	dann	$\neg F$ unerfüllbar		
Wenn	F unerfüllbar,	dann	$\neg F$ gültig		

Spiegelungsprinzip

gültige Formeln	erfüllbare, aber nicht gültige Formeln	unerfüllbare Formeln
$\neg G$	F $\neg F$	G

Ein Gültigkeitstest

Wie kann man überprüfen, ob eine Formel F gültig ist?

Eine Möglichkeit: Wahrheitstafel aufstellen

Angenommen, die Formel F enthält n verschiedene atomare Formeln. Wie groß ist die Wahrheitstafel?

Anzahl Zeilen in der Wahrheitstafel: 2^n

Geht es auch effizienter? Diese Frage wird im Laufe der Vorlesung beantwortet.

Folgerung

Eine Formel G heißt eine *Folgerung* der Formeln $F_1, \dots, F_k$ falls für jede Belegung, die sowohl zu $F_1, \dots, F_k$ als auch zu G passend ist, gilt:

> Wenn $\mathcal{A}$ Modell von $\{F_1, \dots, F_k\}$ ist (d.h. Modell von F_1 und Modell von F_2 und ... und Modell von F_k), dann ist $\mathcal{A}$ auch Modell von G.

Wir schreiben $F_1, \dots, F_k \models G$, falls G eine Folgerung von $F_1, \dots, F_k$ ist.

Folgerung: Beispiel

$$(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK),$$
$$((BK \wedge RL) \rightarrow \neg AK), RL \quad \models \quad (RL \wedge \neg AK) \wedge BK$$

Wenn Bauteil A oder Bauteil B kaputt ist *und* daraus, daß Bauteil A kaputt ist, immer folgt, daß Bauteil B kaputt ist *und* . . .

. . . dann kann man die Folgerung ziehen: das rote Licht leuchtet, Bauteil A ist nicht kaputt und Bauteil B ist kaputt.

Aufgabe

M	F	Gilt $M \models F$?
A	$A \vee B$	
A	$A \wedge B$	
A, B	$A \vee B$	
A, B	$A \wedge B$	
$A \wedge B$	A	
$A \vee B$	A	
$A, A \rightarrow B$	B	

Folgerung, Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $F_1, \ldots, F_k \models G$, d.h., G ist eine Folgerung von $F_1, \ldots, F_k$.
2. $((\bigwedge_{i=1}^{k} F_i) \to G)$ ist gültig.
3. $((\bigwedge_{i=1}^{k} F_i) \wedge \neg G)$ ist unerfüllbar.