

4				9				2
		1				5		
	9		3	4	5		1	
		8				2	5	
7		5		3		4	6	1
	4	6				9		8
	6		1	5	9		8	
		9				6		
5				7				4

Sudoku

4				9				2
		1				5		
	9		3	4	5		1	
		8				2	5	
7		5		3		4	6	1
	4	6				9		8
	6		1	5	9		8	
		9				6		
5				7				4

Füllen Sie die leeren Felder so aus, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem 3x3 Kästchen alle Zahlen von 1 bis 9 stehen.

Warum 6?

4				9				2
		1				5		
	9		3	4	5		1	6
		8				2	5	
7		5		3		4	6	1
	4	6				9		8
	6		1	5	9		8	
		9				6		
5				7				4

Warum 6?

4				9				2
		1				5		
	9		3	4	5		1	⁶ ₇
		8				2	5	³ ₇
7		5		3		4	6	1
	4	6				9		8
	6		1	5	9		8	³ ₇
		9				6		
5				7				4

Geschichte der Logik

Beginn in Griechenland: Aristoteles (384–322 v.Chr.) untersucht das Wesen der **Argumentation** und des **logischen Schließens**.

Verschiedene Werke, u.a.: *Analytica priora*, *Analytica posteriora*.

Aristoteles nennt die logischen Schlussfolgerungen **Syllogismen**.

Syllogismen (I)

*Ein Syllogismus ist eine Aussage, in der bestimmte Dinge [die **Prämissen**] behauptet werden und in der etwas anderes [die **Konsequenz**], unumgänglich aus dem Behaupteten folgt. Mit dem letzten Satz meine ich, dass die Prämissen die Konsequenz zum Resultat haben, und damit meine ich, dass keine weitere Prämisse erforderlich ist, um die Konsequenz unumgänglich zu machen.*

Wenn alle Menschen sterblich sind und
Sokrates ein Mensch ist,
dann ist Sokrates sterblich.

Wenn eine Zahl gerade und größer als zwei ist,
dann ist sie keine Primzahl.

Wenn die Leitzinsen hoch sind,
dann sind die Börsianer unzufrieden.

Syllogismen (II)

Aristoteles kompilierte eine Liste der zulässigen Syllogismen.

Alle Dackel sind Hunde

Alle Hunde sind Tiere

Dann sind alle Dackel Tiere

Alle P sind M

Alle M sind S (Barbara)

Alle P sind S

Keine Blume ist ein Tier

Alle Hunde sind Tiere

Dann ist keine Blume ein Hund

Kein P ist M

Alle S sind M (Cesare)

Kein P ist S

Alle Delfine leben im Meer

Alle Delfine sind Säugetiere

Dann leben einige Säugetiere im Meer

Alle M sind P

Alle M sind S (Darapti)

Einige S sind P

Kritik (aus moderner Sicht)

Es gibt viele korrekte Schlussfolgerungen, die in Aristoteles' Liste nicht vorkommen, z.B.:

Alle Dackel sind Hunde

Alle Dackelsschwänze sind Hundeschwänze

Aristoteles liefert keinen Kalkül für die Behandlung großer Ketten von Schlussfolgerungen. (Sudoku ...)

(Leibniz war etwa 2000 Jahre später der erste, der sich einen solchen Kalkül ausgemalt hat.)

Die Aussagenlogik

George Boole (1815 – 1864)

Atomare Aussagen, die entweder *wahr* oder *falsch* sein können.

Verknüpfung durch **Operatoren** (und; oder; nicht; wenn-dann ...).

Keine Operatoren für Quantifizierung (alle, einige).

Beispiel:

- Aussagen: “Anna ist Architektin”, “Bruno ist Jurist” .
- Vier mögliche Situationen oder **“Welten”** :
 - (1) Anna ist Architektin, Bruno ist Jurist.
 - (2) Anna ist Architektin, Bruno ist kein Jurist.
 - (3) Anna ist keine Architektin, Bruno ist Jurist.
 - (4) Anna ist keine Architektin, Bruno ist kein Jurist.

- Einige der möglichen Verknüpfungen:
 - “Anna ist Architektin oder Bruno ist Jurist” .
 - “Wenn Anna Architektin ist, dann ist Bruno Jurist” .
 - “Wenn Anna keine Architektin ist, dann ist Bruno kein Jurist” .
 - “Wenn Bruno kein Jurist ist, dann ist Anna keine Architektin” .

“ B folgt aus A “: B ist wahr in allen Welten, in denen A wahr ist.

Algebraischer Kalkül um zu bestimmen, ob B aus A folgt.

Der Kalkül basiert auf der Analogie zwischen **wahr** und **1**, **falsch** und **0**, **oder** und **Addition**, **und** und **Multiplikation**.

Die Prädikatenlogik

Frege, Peano, Russell (Ende des 19. Jahrhunderts)

Logik als Grundlage der Mathematik, als formale Basis für die Vermeidung von Widersprüchen.

Entwicklung der Prädikatenlogik, die erlaubt:

- **Beziehungen** zwischen “Objekten” zu beschreiben
- **existentielle Aussagen** zu treffen: “es gibt ein x , so daß ...”
- **universelle Aussage** zu treffen: “für jedes x gilt, daß ...”

Beispiel: Für jede natürliche Zahl x gilt, daß es eine natürliche Zahl y gibt, so daß x kleiner als y ist.

Logik in der Informatik

Claude Shannon (1916 – 2001) zeigt 1937 dass die boole'sche Algebra benutzt werden kann, um elektromechanische Schaltkreise zu beschreiben und zu optimieren.

Newell, Simon, Robinson entwickeln in 1950-1960 die ersten Systeme für die Automatisierung des logischen Schließens als Werkzeug der Künstlichen Intelligenz.

Anwendungen in der Informatik (I)

- **Schaltkreisentwurf:** Schaltkreise lassen sich als logische Formeln darstellen \rightsquigarrow Entwurf und Optimierung von Schaltungen
- **Modellierung und Spezifikation:** Eindeutige Beschreibung von komplexen Systemen
- **Verifikation:** Beweisen, daß ein Programm das gewünschte Verhalten zeigt
- **Datenbanken:** Formulierung von Anfragen an Datenbanken
 \rightsquigarrow Abfragesprache SQL (Structured query language)

Anwendungen in der Informatik (II)

- **Künstliche Intelligenz:**
 - Planung
 - Mensch-Maschine Kommunikation
 - Theorembeweiser: Der Computer beweist mathematische Sätze \rightsquigarrow automatischer Beweis von wichtigen Sätzen im Bereich der Booleschen Algebren
- **Logische Programmiersprachen:** PROLOG

Außerdem: Logik ist ein Paradebeispiel für Syntax und formale Semantik

Ein Zitat von Edsger W. Dijkstra:

Informatik = VLSAL (Very large scale application of logics)

Formale Syntax und Semantik

Auch wenn die Beispiele bisher mit natürlicher Sprache beschrieben wurden, werden wir in Vorlesung meist auf natürliche Sprache verzichten.

Beispiele:

Natürliche Sprache	Formalisierung
Es regnet und die Straße ist naß.	$R \wedge N$
Wenn es regnet, dann ist die Straße naß.	$R \rightarrow N$
Für jede natürliche Zahl x gilt, daß es eine natürliche Zahl y gibt, so daß x kleiner als y ist.	$\forall x \exists y (x < y)$

Frage: Warum nicht natürliche Sprache?

Probleme mit natürlicher Sprache (I)

Problem: Zuordnung von Wahrheitswerten zu natürlichsprachigen Aussagen ist problematisch.

Beispiele:

- Ich habe nur ein bisschen getrunken.
- Sie hat sich in Rauch aufgelöst.
- Das gibt es doch nicht!
- Rache ist süß.

Probleme mit natürlicher Sprache (II)

Problem: Natürliche Sprache ist oft schwer verständlich.

Beispiel: Auszug aus der “Analytica Priora” von Aristoteles

Die Aussage Wenn der Mittelbegriff sich universell auf Ober- oder Untersatz bezieht, muss ein bestimmter negativer Syllogismus resultieren, immer wenn der Mittelbegriff sich universell auf den Obersatz bezieht, sei es positiv oder negativ, und besonders wenn er sich auf den Untersatz bezieht und umgekehrt zur universellen Aussage.

Der Beweis Denn wenn M zu keinem N gehört, aber zu einem O, ist es notwendig, dass N zu einem O nicht gehört. Denn da die negative Aussage umsetzbar ist, wird N zu keinem M gehören: Aber es war erlaubt, dass M zu einem O gehört: Deshalb wird N zu einem O nicht gehören: Denn das Ergebnis wird durch die erste Figur erreicht. Noch einmal: Wenn M zu allen N gehört, aber nicht zu einem O, ist es notwendig, dass N nicht zu einem O gehört: Denn wenn N zu allen O gehört und M auch alle N-Eigenschaften zugeschrieben werden, muss M zu allen O gehören: Aber wir haben angenommen, dass M zu einem O nicht gehört. Und wenn M zu allen N gehört, aber nicht zu allen O, können wir folgern, dass N nicht zu allen O gehört: Der Beweis ist der gleiche wie der obige. Aber wenn M alle O-Eigenschaften zugeschrieben werden, aber nicht alle N-Eigenschaften, wird es keinen Syllogismus geben.

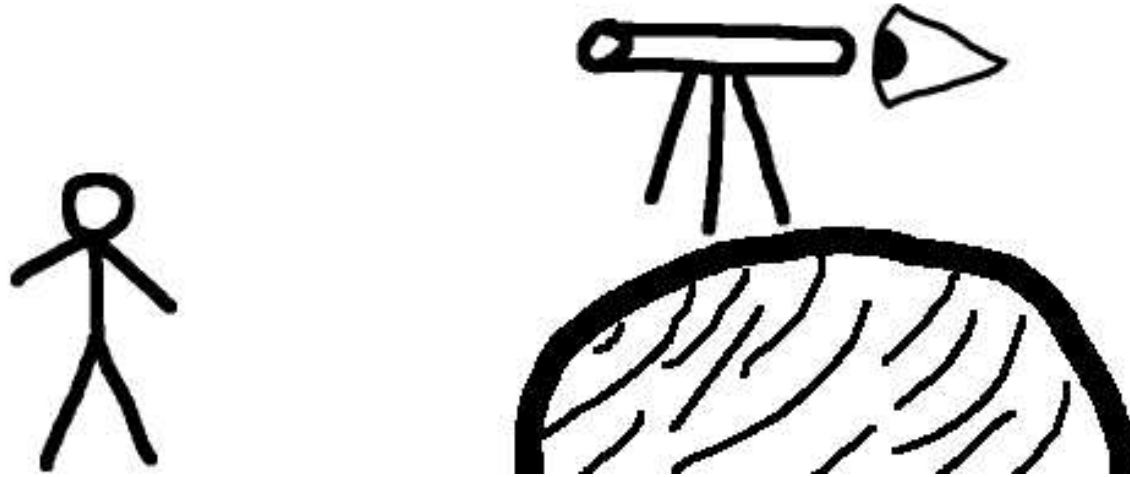
Probleme mit natürlicher Sprache (III)

Problem: Natürliche Sprache ist mehrdeutig.

Beispiel:

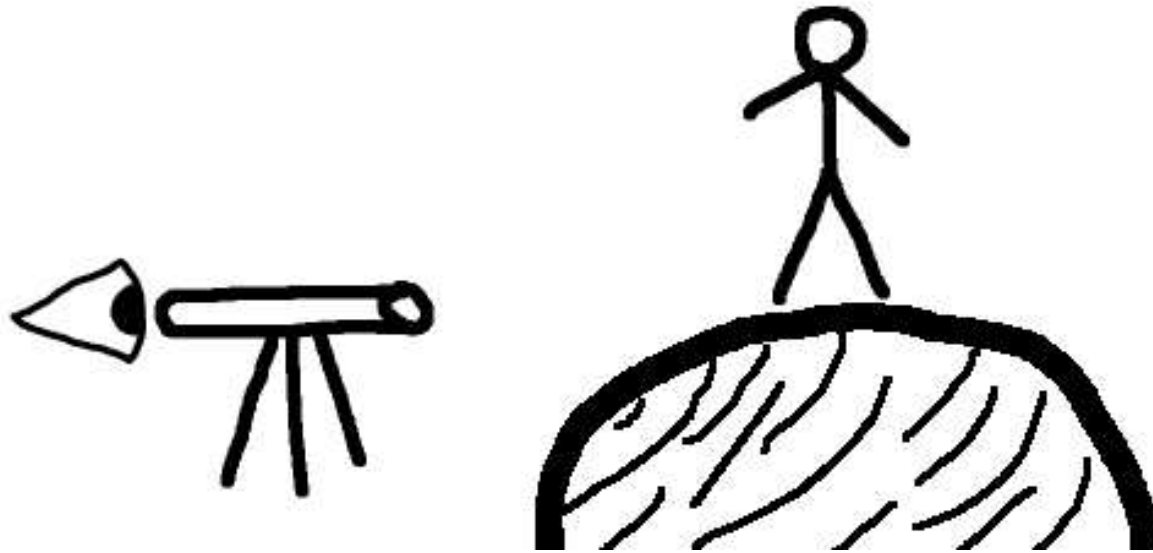
Ich sah den Mann auf dem Berg mit dem Fernrohr.

Ich sah den Mann . . .



((((Ich sah den Mann) auf dem Berg) mit dem Fernrohr)

Ich sah den Mann . . .



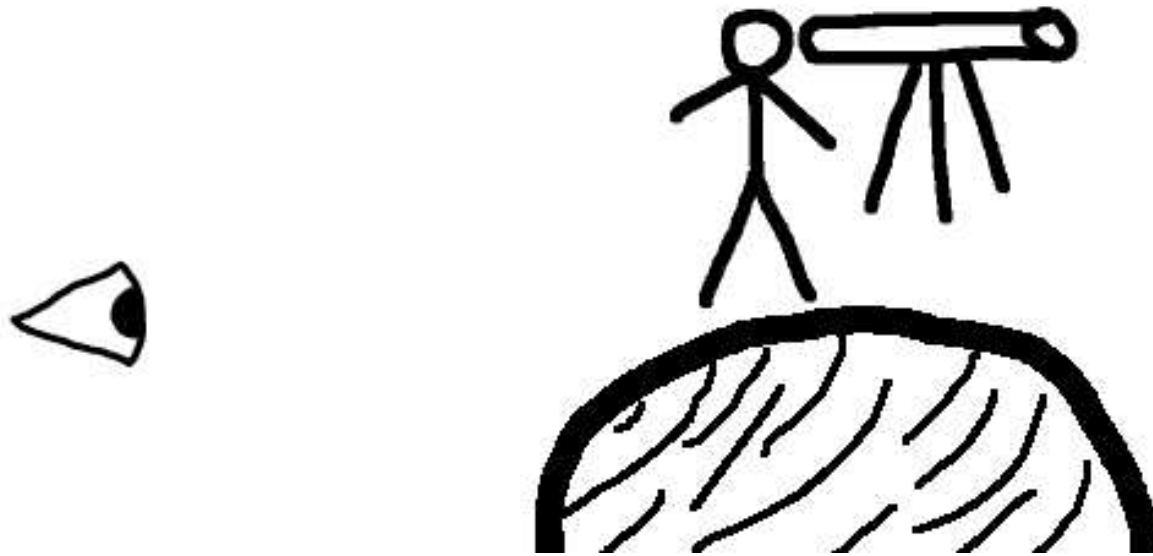
((Ich sah (den Mann auf dem Berg)) mit dem Fernrohr)

Ich sah den Mann . . .



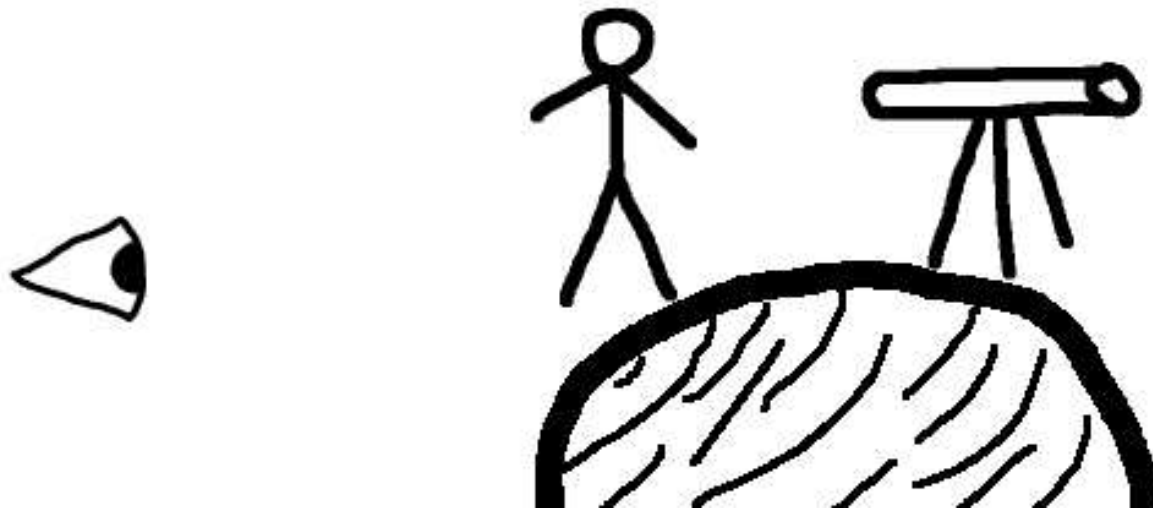
((Ich sah den Mann) (auf dem Berg mit dem Fernrohr))

Ich sah den Mann . . .



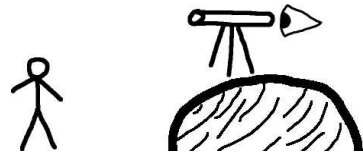
(Ich sah ((den Mann auf dem Berg) mit dem Fernrohr))

Ich sah den Mann . . .

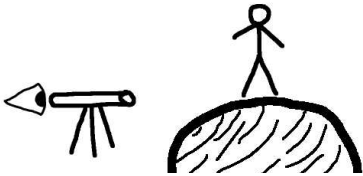


(Ich sah (den Mann (auf dem Berg mit dem Fernrohr)))

Ich sah den Mann . . .



((((Ich sah den Mann) auf dem Berg) mit dem Fernrohr)



((Ich sah (den Mann auf dem Berg)) mit dem Fernrohr)



((Ich sah den Mann) (auf dem Berg mit dem Fernrohr))



(Ich sah ((den Mann auf dem Berg) mit dem Fernrohr))



(Ich sah (den Mann (auf dem Berg mit dem Fernrohr)))

5 mögliche Interpretationen

Probleme mit natürlicher Sprache (III)

Problem: Natürliche Sprache ist nicht “kontext-frei”.

Die Beatles sind Musiker

Paul McCartney ist ein Beatle

Paul McCartney ist ein Musiker

Die Beatles sind vier

Paul McCartney ist ein Beatle

Paul McCartney ist vier