Prädikatenlogik mit Gleichheit

Prädikatenlogik

$+$

ausgezeichnetes Prädikatensymbol $=$ der Stelligkeit 2.

Semantik : in einer Struktur $\mathcal{A}$ der Prädikatenlogik mit Gleichheit gilt stets:

$$=^{\mathcal{A}} \; = \{(d, d) \mid d \in U_{\mathcal{A}}\} \, .$$

Ausdrucksmächtigkeit

Fakt: Eine Struktur ist Modell von $\exists x \forall y \; x = y$ gdw. ihr Universum einelementig ist.

Satz: Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik hat ein unendliches (abzählbares) Modell.

Beweis: Sei F erfüllbar. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $F = \forall x_1 \ldots \forall x_n F^*$, und die Variablen, die in F^* vorkommen, sind genau $x_1, \ldots, x_n$. (Wenn F nicht in Skolemform gewinnen wir aus F eine Aussage F' in Skolemform mit: F hat ein Modell mit Grundmenge X gdw. F' hat ein Modell mit Grundmenge X).

Zwei Fälle:

$n = 0$. Aufgabe.

$n > 0$. Sei $G = \forall x_1 \ldots \forall x_n F^*[x_1/f(x_1)]$ mit f ein Funktionssymbol, dass in F^* nicht vorkommt. G ist erfüllbar (warum?) und $D(G)$ ist unendlich. Aus dem fundamentalen Satz folgt, dass G ein unendliches Modell besitzt.

Modellierung von Gleichheit

Sei F eine Formel der Prädikatenlogik mit Gleichheit und sei Gl ein Prädikatensymbol, das in F nicht vorkommt. Sei G_F die Konjunktion der folgenden Formeln:

$$\forall x\, Gl(x,x)$$

$$\forall x \forall y (Gl(x,y) \rightarrow Gl(y,x))$$

$$\forall x \forall y \forall z ((Gl(x,y) \wedge Gl(y,z)) \rightarrow Gl(x,z))$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y (Gl(x_i,y) \rightarrow Gl(f(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n), f(x_1,\ldots,y,\ldots,x_n)))$$

für jedes Funktionsymbol f von F und jedes $1 \leq i \leq n$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y (Gl(x_i,y) \rightarrow (P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \leftrightarrow P(x_1,\ldots,y,\ldots,x_n)))$$

für jedes Prädikatensymbol P von F und jedes $1 \leq i \leq n$

Sei H_F die Formel, die man erhält, in dem jedes Vorkommen von "$=$" in F durch "Gl" ersetzt.

Satz: Die Formeln F und $G_F \wedge H_F$ sind erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis: Wir zeigen: Wenn $G_F \wedge H_F$ erfüllbar dann F erfüllbar.

Sei $\mathcal{A} \models G_F \wedge H_F$. Dann ist $Gl^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation. Für $d \in U_{\mathcal{A}}$ sei $[d]$ die Äquivalenzklasse von d. Wir definieren die Struktur $\mathcal{B}$ mit:

- $U_{\mathcal{B}} = \{[d] \mid d \in U_{\mathcal{A}}\}$.
- Für jedes Funktionsymbol f von F:
  $f^{\mathcal{B}}([d_1], \ldots, [d_n]) = [f^{\mathcal{A}}(d_1, \ldots, d_n)]$
  (wohldefiniert wegen $\mathcal{A} \models G_F$).
- Für jedes Prädikatensymbol P von F:
  $([d_1], \ldots, [d_n]) \in P^{\mathcal{B}}$ gdw. $(d_1, \ldots, d_n) \in P^{\mathcal{A}}$
  (wohldefiniert wegen $\mathcal{A} \models G_F$).

Mit $\mathcal{A} \models H_F$ gilt $\mathcal{B} \models F$.

Eine Anwendung

Satz: Jede Formel F ohne Funktionssymbole der Gestalt $F = \forall x \exists u \forall y F^*$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu einer Formel G, auch ohne Funktionssymbole, der Gestalt $G = \forall x \forall y \forall z \exists v G^*$.

Beweis:

- Sei P ein Prädikatensymbol, dass in F nicht vorkommt. Nehme

  $$H = \forall x \forall y \forall z \exists v (P(x,v) \wedge (P(x,y) \rightarrow y = v)) \wedge (P(x,z) \rightarrow F^*[u/z]))$$

- Ersetze $y = v$ durch $Gl(y,v)$ in H, und addiere die Formeln, die ausdrücken, dass Gl eine Äquivalenzrelation und eine Kongruenz ist.
- Bringe die resultierende Formel in Pränexform. Sei G das Ergebnis.

Es gilt $F \equiv_e H \equiv_e G$.