

# Der Endlichkeitssatz

**Satz:** Eine Menge  $M$  von Formeln ist erfüllbar genau dann, wenn jede der endlichen Teilmengen von  $M$  erfüllbar ist.

**Äquivalente Formulierung:** Eine Menge  $M$  von Formeln ist unerfüllbar genau dann, wenn eine endliche Teilmenge von  $M$  unerfüllbar ist.

# Beweis I

$\Rightarrow$  : Wenn  $\mathbf{M}$  erfüllbar ist, dann ist auch jede endliche Teilmenge von  $\mathbf{M}$  erfüllbar.

Trivial.

$\Leftarrow$  : Wenn jede endliche Teilmenge von  $\mathbf{M}$  erfüllbar ist, dann ist auch  $\mathbf{M}$  erfüllbar.

Zu zeigen:  $\mathbf{M}$  hat ein Modell.

Für jedes  $n \geq 1$  sei  $\mathbf{M}_n$  die Menge der Formeln in  $\mathbf{M}$ , die nur die atomaren Formeln  $A_1, \dots, A_n$  enthalten.

Bemerkung: Es gilt  $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2 \subseteq \mathbf{M}_3 \dots$

# Beweis II

Behauptung 1: Jede der Mengen  $\mathbf{M}_n$  hat ein Modell  $\mathcal{A}_n$ .

Behauptung 2: Die Belegung  $\mathcal{A}_n$  ist Modell nicht nur Modell von  $\mathbf{M}_n$ , sondern auch von  $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_{n-1}$ .

# Beweis III

**Behauptung 3:** Jede Belegung  $\mathcal{A}$ , die die folgende Eigenschaft erfüllt, ist Modell von  $\mathbf{M}$ :

Für jedes  $n \geq 1$  gibt es ein  $j \geq i$ , so dass die Restriktion von  $\mathcal{A}$  auf  $A_1, \dots, A_i$  und die Restriktion von  $\mathcal{A}_j$  auf  $A_1, \dots, A_i$  übereinstimmen.

**Behauptung 4:** Es gibt mindestens eine Belegung  $\mathcal{A}$ , die diese Eigenschaft erfüllt.