Der Endlichkeitssatz

Satz: Eine Menge $\mathbf{M}$ von Formeln ist erfüllbar genau dann, wenn jede der endlichen Teilmengen von $\mathbf{M}$ erfüllbar ist.

Äquivalente Formulierung: Eine Menge $\mathbf{M}$ von Formeln ist unerfüllbar genau dann, wenn eine endliche Teilmenge von $\mathbf{M}$ unerfüllbar ist.

Beweis I

$\Rightarrow$: Wenn $\mathbf{M}$ erfüllbar ist, dann ist auch jede endliche Teilmenge von $\mathbf{M}$ erfüllbar.

Trivial.

$\Leftarrow$: Wenn jede endliche Teilmenge von $\mathbf{M}$ erfüllbar ist, dann ist auch $\mathbf{M}$ erfüllbar.

Zu zeigen: $\mathbf{M}$ hat ein Modell.

Für jedes $n \geq 1$ sei $\mathbf{M_n}$ die Menge der Formeln in $\mathbf{M}$, die nur die atomaren Formeln $A_1, \ldots, A_n$ enthalten.

Bemerkung: Es gilt $\mathbf{M_1} \subseteq \mathbf{M_2} \subseteq \mathbf{M_3} \ldots$

Beweis II

Behauptung 1: Jede der Mengen $\mathbf{M_n}$ hat ein Modell $\mathcal{A}_n$.

Behauptung 2: Die Belegung $\mathcal{A}_n$ ist Modell nicht nur Modell von $\mathbf{M_n}$, sondern auch von $\mathbf{M_1}, \ldots, \mathbf{M_{n-1}}$.

Beweis III

Behauptung 3: Jede Belegung $\mathcal{A}$, die die folgende Eigenschaft erfüllt, ist Modell von $\mathbf{M}$:

> Für jedes $n \geq 1$ gibt es ein $j \geq i$, so dass die Restriktion von $\mathcal{A}$ auf $A_1, \ldots, A_i$ und die Restriktion von $\mathcal{A}_j$ auf $A_1, \ldots, A_i$ übereinstimmen.

Behauptung 4: Es gibt mindestens eine Belegung $\mathcal{A}$, die diese Eigenschaft erfüllt.