

Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 25. Januar, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Resolution

- (a) Finden Sie eine Klauselmengemenge F , so dass $Res^*(F)$ unendlich ist.
- (b) Gegeben sei folgende Klauselmengemenge:

$$\{\{\neg Q(x, g(x))\}, \{\neg P(f(x)), \neg R(x, y)\}, \{R(x, f(x)), Q(a, x)\}, \{\neg R(g(a), z), P(z)\}\}$$

Bereits in Übungsblatt 11, Aufgabe 2(b) haben wir durch Resolution gezeigt, dass die Formel unerfüllbar ist. Finden Sie Resolutionsbeweise für die Sonderfälle der P-Resolution, der N-Resolution und der linearen Resolution.

Aufgabe 2 Stützmengen-Restriktion

- (a) Eine in der Vorlesung nicht vorgestellte Art der Resolution ist die *Stützmengen-Restriktion*. Diese ist dann anwendbar, wenn man weiß, dass ein Teil der Klauselmengemenge erfüllbar ist. Sei F eine Klauselmengemenge und $F' \subseteq F$ eine erfüllbare Teilmenge von F . Die Stützmengenrestriktion der Resolution bedeutet, dass ein Resolutionschritt niemals mit zwei Klauseln aus F' gebildet wird.

Zeigen Sie: Die Stützmengen-Restriktion ist vollständig, d.h., wenn F unerfüllbar ist, dann gibt es einen Resolutions-Beweis, der die o.g. Restriktion erfüllt.

- (b) Sie hören mit Freunden eine Radio-Reportage eines Fußballspiels. Der Reporter berichtet, dass sehr offensiv gespielt wird, so dass kein Stürmer jemals in der eigenen Hälfte steht. Außerdem berichtet er, dass gerade niemand im Abseits steht.

Ihre Kenntnisse der Fußballregeln besagen, dass jemand im Abseits steht, wenn er in der gegnerischen Hälfte ist und weniger als zwei Gegner näher zum gegnerischen Tor stehen als er selbst. Die eigene Hälfte ist weiter vom gegnerischen Tor entfernt als die gegnerische Hälfte.

Aus der Reportage und Ihrer Regelkenntnis schließen Sie: Entweder steht kein Stürmer auf dem Platz, oder jeder Spieler hat mindestens zwei Gegner zwischen sich und dem gegnerischen Tor. Ihre Freunde zweifeln dies an. Beweisen Sie, dass Sie recht haben, und zwar wie folgt:

- i) Formulieren Sie die Aussagen des Reporters und die Regeln als eine prädikatenlogische Formel F , die Schlussfolgerung als eine Formel G . *Hinweis:* Verwenden Sie Prädikate wie $S(x)$ (“ x ist ein Stürmer”), $A(x)$ (“ x steht im Abseits”), $G(x)$ (“ x steht in der gegnerischen Hälfte”) und $V(x)$ (“ x hat mindestens zwei Gegenspieler vor sich”).
- ii) Bringen Sie F und $\neg G$ in Skolemform und KNF.
- iii) Zeigen Sie mit Hilfe von Stützmenge-Restriktion, dass $F \wedge \neg G$ unerfüllbar ist. Benutzen Sie die Stützmengeresolution mit erfüllbarer Teilformel F .