

Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 25. Januar, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Resolution

- (a) Finden Sie eine Klauselmengemenge F , so dass $Res^*(F)$ unendlich ist.
- (b) Gegeben sei folgende Klauselmengemenge:

$$\{\{\neg Q(x, g(x))\}, \{\neg P(f(x)), \neg R(x, y)\}, \{R(x, f(x)), Q(a, x)\}, \{\neg R(g(a), z), P(z)\}\}$$

Bereits in Übungsblatt 11, Aufgabe 2(b) haben wir durch Resolution gezeigt, dass die Formel unerfüllbar ist. Finden Sie Resolutionsbeweise für die Sonderfälle der P-Resolution, der N-Resolution und der linearen Resolution.

Aufgabe 1 (Lösungsvorschlag) Resolution

- (a) Ein einfaches Beispiel ist die Menge

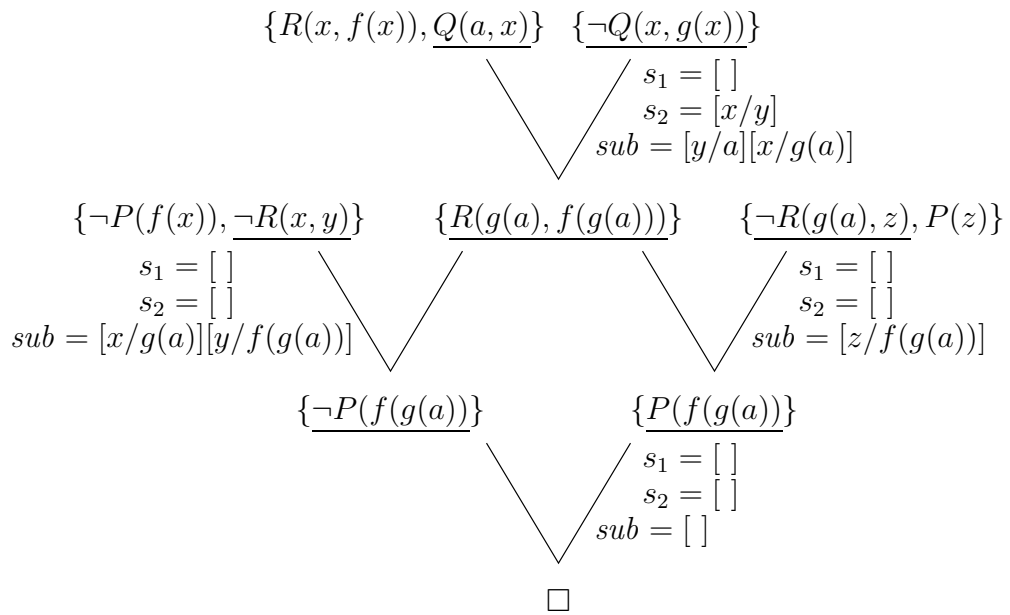
$$F = \{ \{P(a)\}, \{\neg P(x), P(f(x))\} \}.$$

Resolviert man die ersten beiden Klauseln (mit der Substitution $[x/a]$), so erhält man $\{P(f(a))\}$. Im zweiten Resolutionsschritt erhält man (mit der Substitution $[x/f(a)]$) erhält man $\{P(f(f(a)))\}$ usw. Es gilt also

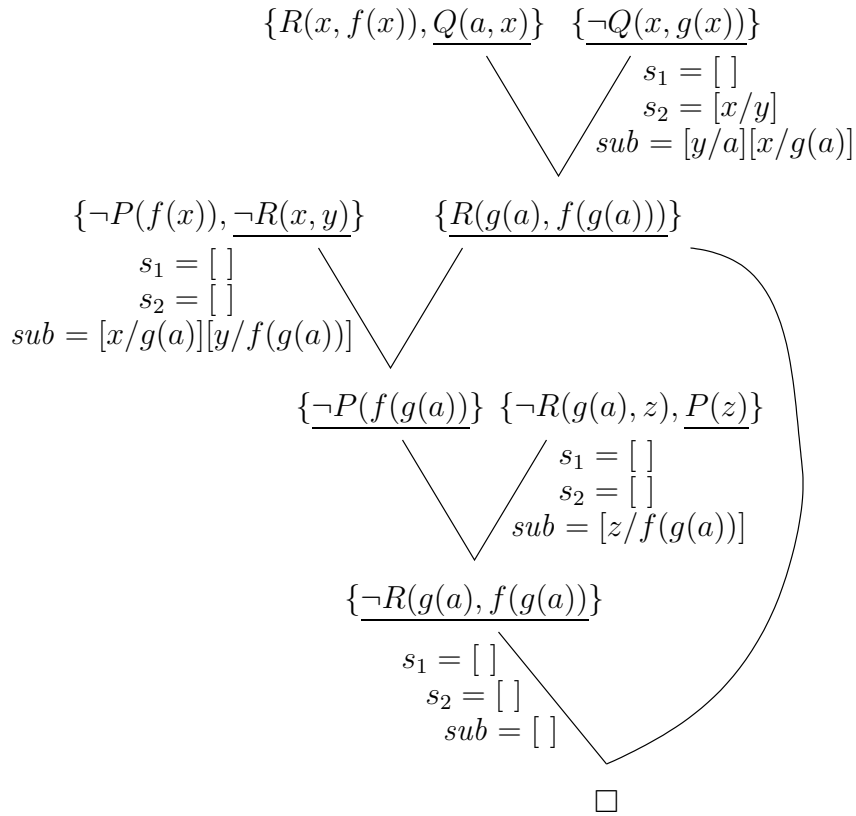
$$Res(F) \supset \{ \{P(f^i(a))\} \mid i \geq 0 \},$$

d.h. $Res(F)$ ist unendlich. (Die obige Resolution ist strikt, da man die zweite Klausel auch mit sich selbst resolvieren kann und so noch zusätzliche Resolventen erhält.)

- (b) Der untenstehende Resolutionsbeweis erfüllt die P-Restriktion und ist identisch mit dem Beweis von Übungsblatt 11.



Folgender Beweis erfüllt zugleich die N-Restriktion und die lineare Restriktion:



Aufgabe 2 Stützmengen-Restriktion

- (a) Eine in der Vorlesung nicht vorgestellte Art der Resolution ist die *Stützmengen-Restriktion*. Diese ist dann anwendbar, wenn man weiß, dass ein Teil der Klauselmengemenge erfüllbar ist. Sei F eine Klauselmengemenge und $F' \subseteq F$ eine erfüllbare Teilmenge von F . Die Stützmengenrestriktion der Resolution bedeutet, dass ein Resolutions-schritt niemals mit zwei Klauseln aus F' gebildet wird.

Zeigen Sie: Die Stützmengen-Restriktion ist vollständig, d.h., wenn F unerfüllbar ist, dann gibt es einen Resolutions-Beweis, der die o.g. Restriktion erfüllt.

- (b) Sie hören mit Freunden eine Radio-Reportage eines Fußballspiels. Der Reporter berichtet, dass sehr offensiv gespielt wird, so dass kein Stürmer jemals in der eigenen Hälfte steht. Außerdem berichtet er, dass gerade niemand im Abseits steht.

Ihre Kenntnisse der Fußballregeln besagen, dass jemand im Abseits steht, wenn er in der gegnerischen Hälfte ist und weniger als zwei Gegner näher zum gegnerischen Tor stehen als er selbst. Die eigene Hälfte ist weiter vom gegnerischen Tor entfernt als die gegnerische Hälfte.

Aus der Reportage und Ihrer Regelkenntnis schließen Sie: Entweder steht kein Stürmer auf dem Platz, oder jeder Spieler hat mindestens zwei Gegner zwischen sich und dem gegnerischen Tor. Ihre Freunde zweifeln dies an. Beweisen Sie, dass Sie recht haben, und zwar wie folgt:

- i) Formulieren Sie die Aussagen des Reporters und die Regeln als eine prädikatenlogische Formel F , die Schlussfolgerung als eine Formel G . *Hinweis:* Verwenden Sie Prädikate wie $S(x)$ (“ x ist ein Stürmer”), $A(x)$ (“ x steht im Abseits”), $G(x)$ (“ x steht in der gegnerischen Hälfte”) und $V(x)$ (“ x hat mindestens zwei Gegenspieler vor sich”).
- ii) Bringen Sie F und $\neg G$ in Skolemform und KNF.
- iii) Zeigen Sie mit Hilfe von Stützmengen-Restriktion, dass $F \wedge \neg G$ unerfüllbar ist. Benutzen Sie die Stützmengenresolution mit erfüllbarer Teilformel F .

Aufgabe 2 (Lösungsvorschlag) *Stützmengen-Restriktion*

- (a) Angenommen, F ist unerfüllbar. In der Vorlesung wurde in Zusammenhang mit der linearen Restriktion folgendes gezeigt: Sei G eine unerfüllbare Teilmenge von F mit minimaler Anzahl von Klauseln. Dann gibt es für jede Klausel K aus G eine lineare Herleitung, die mit K beginnt.

Wir wissen nun, dass $F' \subset F$ erfüllbar ist. Eine minimale unerfüllbare Teilmenge G enthält also mindestens eine Klausel $K \in F \setminus F'$, und es gibt einen linearen Resolutionsbeweis, der mit K beginnt. Keiner der Schritte in diesem Resolutionsbeweis enthält zwei Klauseln aus F' , sondern wenigstens eine Klausel in jedem Schritt ist entweder K oder eine aus K durch Resolutions-schritte hergeleitete Formel.

(b) i) Die Aussagen des Reporters und die Regeln sind wie folgt:

“Kein Stürmer ist in der eigenen Hälfte.”

$$\forall x(S(x) \rightarrow G(x))$$

“Niemand steht im Abseits.”

$$\forall x\neg A(x)$$

“Wer in der gegnerischen Hälfte steht und keine zwei Gegner vor sich hat, ist abseits.”

$$\forall x((G(x) \wedge \neg V(x)) \rightarrow A(x))$$

Die Aussage “Die eigene Hälfte ist weiter vom gegnerischen Tor weg als die gegnerische” ist schwieriger zu übersetzen. Wir können uns aber überlegen, dass sie die Spieler bezüglich ihres Abstands zum Tor ordnet. Ein Spieler in der gegnerischen Hälfte ist näher am Tor als einer in der anderen Hälfte. Hat dieser also zwei Spieler vor sich, so auch jener.

$$\forall x\forall y((G(x) \wedge V(x) \wedge \neg G(y)) \rightarrow V(y))$$

(Dass man diese Aussage braucht, merkt man spätestens, wenn man im Resolutionsbeweis sonst nicht weiterkommt ;-)

F ist die Konjunktion der vier obigen Formeln. Außerdem ist

$$G = \forall x\neg S(x) \vee \forall xV(x).$$

ii) Nach Ausführung dieser Schritte ist F in Mengenschreibweise wie folgt:

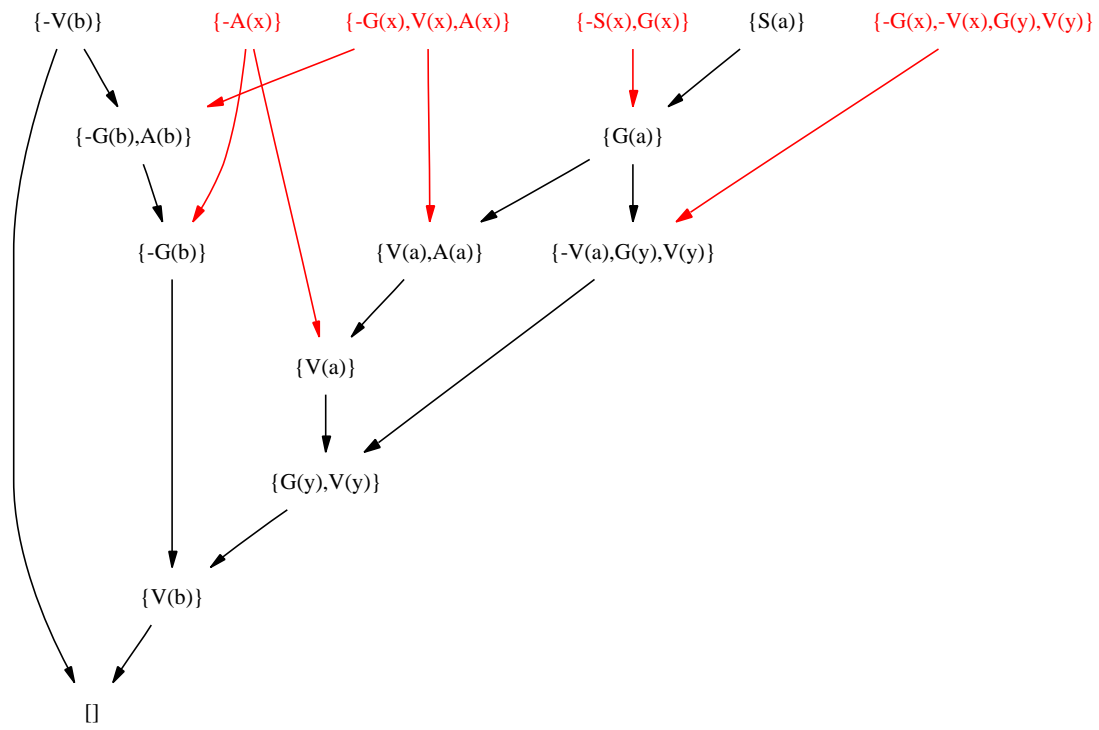
$$\{\{\neg S(x), G(x)\}, \{\neg A(x)\}, \{\neg G(x), V(x), A(x)\}, \{\neg G(x), \neg V(x), G(y), V(y)\}\}$$

Die Mengenschreibweise von $\neg G$ ist:

$$\{\{S(a)\}, \{\neg V(b)\}\}$$

Hierbei sind a und b Konstanten, die bei der Skolemisierung entstanden sind, weil sich die Allquantoren durch die Negation in Existenzquantoren verwandelt haben.

iii) Wenn wir davon ausgehen, dass unsere Regelkenntnisse korrekt sind und der Reporter die Wahrheit sagt, so muss F erfüllbar sein. Wir können daher $\neg G$ als Stützmengung für unseren Beweis verwenden. Dies hat den Vorteil, dass bei der Resolution nur wenige und kleine Resolventen entstehen. Ein Resolutionsbeweis mit Anwendung der Stützmengen-Restriktion wäre dann wie folgt:



Wie man leicht sieht, werden niemals zwei Klauseln aus F miteinander resolviert.