Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 18. Januar, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Unifikation

(a) Sei $\mathbf{L}_1 = \{R(a,x,y), R(y,b,y), R(a,z,x)\}$. Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf $\mathbf{L}_1$ an, und zeigen Sie, wie sich der Unifikator *sub* während des Algorithmus verändert. Ist $\mathbf{L}_1$ unifizierbar?

(b) Führen Sie diese Schritte mit $\mathbf{L}_2 = \{R(f(x,a),x), R(f(z,u),h(b,v)), R(y,h(w,c))\}$ durch.

Aufgabe 1 **(Lösungsvorschlag)** *Unifikation*

(a) *sub* entwickelt sich so: [ ], dann $[y/a]$, dann $[y/a][x/b]$, dann $[y/a][x/b][z/b]$. Man erhält somit $\mathbf{L}sub = \{R(a,b,a), R(a,b,b)\}$. Die Unifikation misslingt also.

(b) Bemerkung: In jedem Schritt des Unifikationsalgorithmus werden zwei verschiedene Literale ausgewählt, und es wird die erste Stelle gesucht, an der sie sich unterscheiden. Der Algorithmus gibt jedoch nicht vor, welche Literale ausgewählt werden. Daher gibt es mehrere mögliche Abläufe. Der unten angegebene Ablauf entsteht unter der Annahme, dass man immer die "ersten beiden" Elemente aus der Menge $\mathbf{L}sub$ wählt. Prinzipiell könnte der Algorithmus jedoch auch in anderer Reihenfolge ablaufen, jedoch immer mit demselben Ergebnis.

i) Der erste Durchlauf des Algorithmus ergibt $sub = [x/z]$ und

$$\mathbf{L}_2 sub = \{R(f(z,a),z), R(f(z,u),h(b,v)), R(y,h(w,c))\} .$$

ii) Der nächste Durchlauf des Algorithmus ergibt $sub = [x/z][u/a]$ und

$$\mathbf{L}_2 sub = \{R(f(z,a),z), R(f(z,a),h(b,v)), R(y,h(w,c))\} .$$

iii) Der nächste Durchlauf des Algorithmus ergibt $sub = [x/z][u/a][z/h(b,v)]$ und

$$\mathbf{L}_2 sub = \{R(f(h(b,v),a),h(b,v)), R(y,h(w,c))\} .$$

(Die Menge ist um ein Element kleiner geworden, weil zwei Literale zusammengefallen sind.)

iv) Der nächste Durchlauf des Algorithmus ergibt

$$sub = [x/z][u/a][z/h(b,v)][y/f(h(b,v),a)]$$

und

$$\mathbf{L}_2 sub = \{R(f(h(b,v),a),h(b,v)), R(f(h(b,v),a),h(w,c))\} \ .$$

v) Die letzten beiden Durchläufe des Algorithmus ergeben

$$sub = [x/z][u/a][z/h(b,v)][y/f(h(b,v),a)][w/b][v/c]$$

und

$$\mathbf{L}_2 sub = \{R(f(h(b,c),a),h(b,c))\} \ .$$

Der Unifikationsalgorithmus gibt den allgemeinsten Unifikator *sub* aus.

Aufgabe 2 Prädikatenlogische Resolution

(a) Sei $F = \big\{\{P(y), S(x)\},\ \{\neg P(z), S(y)\},\ \{\neg S(g(z))\}\big\}$.
Berechnen Sie mit *prädikatenlogischer* Resolution die Klauselmenge $Res^1(F)$.

Geben Sie bei jeder Berechnung eines Resolventen die Umbenennungen s_1, s_2 und den allgemeinsten Unifikator *sub* an.

(b) Zeigen Sie, dass folgende Klauselmenge unerfüllbar ist, indem Sie die leere Klausel aus ihr herleiten. Stellen Sie Ihren Resolutionsbeweis wie in der Vorlesung graphisch dar.

$$\big\{\{\neg Q(x,g(x))\},\ \{\neg P(f(x)), \neg R(x,y)\},\ \{R(x,f(x)), Q(a,x)\},\ \{\neg R(g(a),z), P(z)\}\big\}$$

(c) Verwenden Sie das Tool `otter`, um die Unerfüllbarkeit folgender Klauselmenge festzustellen:

$$\big\{\{P(f(x)), Q(f(y))\},\ \{\neg P(f(a))\},\ \{\neg Q(f(g(a))), \neg Q(g(f(x))), \neg Q(g(x))\},\ \{Q(g(x)), Q(g(f(f(x))))\}\big\}$$

Lesen Sie den Resolutionsbeweis aus der Ausgabe von `otter` ab und stellen Sie ihn graphisch dar.

Hinweise zum Arbeiten mit `otter` finden Sie in einem Informationsblatt auf der Vorlesungs-Webseite.

Aufgabe 2 **(Lösungsvorschlag)** *Prädikatenlogische Resolution*

(a) Zwischen jedem Paar von Klauseln ist jeweils ein Resolvent möglich:

$\{\underline{P(y)}, S(x)\}$ $\{\underline{\neg P(z)}, S(y)\}$
$s_1 = [y/u]$
$s_2 = [\ ]$
$sub = [u/z]$
$R_1 = \{S(x), S(y)\}$

$\{P(y), \underline{S(x)}\}$ $\{\underline{\neg S(g(z))}\}$
$s_1 = [\ ]$
$s_2 = [\ ]$
$sub = [x/g(z)]$
$R_2 = \{P(y)\}$

$\{\neg P(z), \underline{S(y)}\}$ $\{\underline{\neg S(g(z))}\}$
$s_1 = [z/u]$
$s_2 = [\ ]$
$sub = [y/g(z)]$
$R_3 = \{\neg P(u)\}$

Also: $Res^1(F) = F \cup \{R_1, R_2, R_3\}$.

(b) Ein möglicher Resolutionsbeweis ist wie folgt:

$\{R(x, f(x)), \underline{Q(a, x)}\}$ $\{\underline{\neg Q(x, g(x))}\}$
$s_1 = [\ ]$
$s_2 = [x/y]$
$sub = [y/a][x/g(a)]$

$\{\neg P(f(x)), \underline{\neg R(x, y)}\}$ $\{\underline{R(g(a), f(g(a)))}\}$ $\{\underline{\neg R(g(a), z)}, P(z)\}$

$s_1 = [\ ]$
$s_2 = [\ ]$
$sub = [x/g(a)][y/f(g(a))]$

$s_1 = [\ ]$
$s_2 = [\ ]$
$sub = [z/f(g(a))]$

$\{\underline{\neg P(f(g(a))}\}$ $\{\underline{P(f(g(a))}\}$
$s_1 = [\ ]$
$s_2 = [\ ]$
$sub = [\ ]$

$\square$

(c) Die Struktur des von `otter` ausgegebenen Beweises ist wie unten angegeben. (Die tatsächliche Ausgabe von `otter` gibt die verwendeten Substitutionen nicht an, und die Variablennamen sind anders.)