

## Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 11. Januar, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

### Aufgabe 1 Ein Rätsel

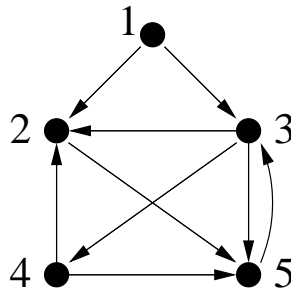
- (a) Unten sehen Sie einen gerichteten Graphen. Jemand wählt heimlich eine Kante aus dem Graphen aus und teilt Alice den Startknoten der Kante mit und Bert den Endknoten. Es entspannt sich folgender Dialog:

Alice: "Ich weiß nicht, welche Kante es ist."

Bert: "Ich auch nicht."

Alice: "Jetzt weiß ich die Kante."

Welche Kante ist es?



- (b) Ersetzen wir den Graphen aus (a) durch einen beliebigen gerichteten Graphen  $G = (V, E)$ , wobei  $V$  die Knoten und  $E$  die Kanten sind. Folgende Formel  $F$  der Prädikatenlogik mit Gleichheit legt die Kantenrelation eindeutig fest (in dem Sinne, dass in jedem Modell  $\mathcal{A}$  von  $F$  gilt:  $E^{\mathcal{A}} = E$ ).

$$F = \bigwedge_{(u,v) \in E} E(u, v) \wedge \forall x \forall y \left( E(x, y) \rightarrow \bigvee_{(u,v) \in E} (x = u \wedge y = v) \right)$$

Entwerfen Sie eine Formel  $G$  der Prädikatenlogik mit Gleichheit, so dass die Formel  $F \rightarrow G$  genau dann gültig ist, wenn der obige Dialog die gewählte Kante eindeutig bestimmt.

## Aufgabe 2 Unentscheidbarkeit

Sei  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, F)$  eine Turing-Maschine mit einseitig unendlichem Band, wobei

- $Q$  die Zustände sind,  $q_0 \in Q$  der Anfangszustand und  $F \subseteq Q$  die Menge der akzeptierenden Zustände;
- $\Gamma$  das Bandalphabet,  $\Sigma \subseteq \Gamma$  das Eingabealphabet und  $\perp \in \Gamma \setminus \Sigma$  das Zeichen für das leere Feld;
- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \{L, N, R\} \times \Gamma$  die Überföhrungsfunktion ist.

Stellen Sie eine prädikatenlogische Formel  $F_{\mathcal{M}}$  auf, so dass Folgendes gilt:  $F_{\mathcal{M}}$  ist gültig genau dann, wenn  $\mathcal{M}$ , beginnend auf dem leeren Band, einen akzeptierenden Zustand erreicht.

Hinweise:

- Dies ist ein weiterer Beweis für die Unentscheidbarkeit des Gültigkeitsproblems. Gehen Sie analog zu dem Beweis in der Vorlesung mittels if-goto-Programmen vor.
- Verwenden Sie Prädikate wie  $Q(i, j, q)$  (“zum Zeitpunkt  $i$  ist der Lesekopf über der Position  $j$  und im Zustand  $q$ ”) und  $B(i, j, z)$  (“zum Zeitpunkt  $i$  trägt das Band an Position  $j$  das Zeichen  $z$ ”).
- Der Einfachheit halber kann man annehmen, dass die Zustände und das Bandalphabet Teilmengen der natürlichen Zahlen sind, dadurch kann man eine kanonische Interpretation mit den natürlichen Zahlen als Universum verwenden.