Übung zu Logik

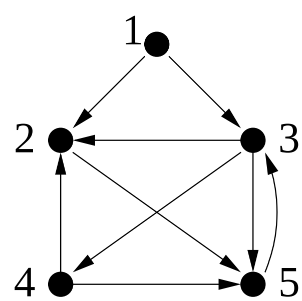
Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 11. Januar, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Ein Rätsel

(a) Unten sehen Sie einen gerichteten Graphen. Jemand wählt heimlich eine Kante aus dem Graphen aus und teilt Alice den Startknoten der Kante mit und Bert den Endknoten. Es entspannt sich folgender Dialog:

Alice: "Ich weiß nicht, welche Kante es ist."
Bert: "Ich auch nicht."
Alice: "Jetzt weiß ich die Kante."

Welche Kante ist es?



(b) Ersetzen wir den Graphen aus (a) durch einen beliebigen gerichteten Graphen $G = (V, E)$, wobei V die Knoten und E die Kanten sind. Folgende Formel F der Prädikatenlogik mit Gleichheit legt die Kantenrelation eindeutig fest (in dem Sinne, dass in jedem Modell $\mathcal{A}$ von F gilt: $E^{\mathcal{A}} = E$).

$$F = \bigwedge_{(u,v)\in E} E(u,v) \wedge \forall x \forall y \Big(E(x,y) \rightarrow \bigvee_{(u,v)\in E} (x = u \wedge y = v) \Big)$$

Entwerfen Sie eine Formel G der Prädikatenlogik mit Gleichheit, so dass die Formel $F \rightarrow G$ genau dann gültig ist, wenn der obige Dialog die gewählte Kante eindeutig bestimmt.

Aufgabe 1 **(Lösungsvorschlag)** *Ein Rätsel*

(a) Der erste Satz bedeutet, dass der Startknoten mehrere ausgehende Kanten haben muss, dies trifft auf 1, 3 und 4 zu. Der zweite Satz bedeutet, dass der Zielknoten mehr als eine eingehende Kante von diesen drei Knoten hat, d.h. der Zielknoten ist entweder 2 oder 5. Der dritte Satz bedeutet, dass der Startknoten genau eine Kante zu einem dieser beiden Knoten hat. Dies trifft nur auf den Knoten 1 zu, wobei der Zielknoten die 2 ist.

(b) $G = G_1 \to G_2$ mit

$$\begin{aligned}
G_1 &= \forall x\big(P(x) \leftrightarrow \exists x \exists y(E(x,y) \land E(x,z) \land y \neq z)\big) \\
&\quad \land \forall x\big(Q(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(E(y,x) \land E(z,x) \land y \neq z \land P(y) \land P(z)\big) \\
&\quad \land \forall x\big(R(x) \leftrightarrow \big(P(x) \land \exists y\big(E(x,y) \land Q(y) \land \forall z((E(x,z) \land Q(z)) \to y = z)\big)\big)\big) \\
G_2 &= \exists u \exists v\big(R(u) \land Q(v) \land E(u,v) \land \forall x \forall y(E(x,y) \land R(u) \land Q(v) \to x = u \land y = v)\big)
\end{aligned}$$

Zur Erläuterung: In G_1 wird festgelegt, dass $P(x)$ genau dann gelten soll, wenn x nach der ersten Aussage von Alice noch als Startknoten in Frage kommt. Analog soll $Q(x)$ genau dann gelten, wenn x nach der Aussage von Bert noch als Endknoten in Frage kommt, und $R(x)$, wenn x nach der letzten Aussage von Alice als Startknoten in Frage kommt. G_2 besagt, dass es eindeutige Knoten geben soll, die diese Eigenschaften haben und verbunden sind.

Aufgabe 2 Unentscheidbarkeit

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \bot, F)$ eine Turing-Maschine mit einseitig unendlichem Band, wobei

- Q die Zustände sind, $q_0 \in Q$ der Anfangszustand und $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierenden Zustände;
- Γ das Bandalphabet, $\Sigma \subseteq \Gamma$ das Eingabealphabet und $\bot \in \Gamma \setminus \Sigma$ das Zeichen für das leere Feld;
- $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \{L, N, R\} \times \Gamma$ die Überführungsfunktion ist.

Stellen Sie eine prädikatenlogische Formel $F_{\mathcal{M}}$ auf, so dass Folgendes gilt: $F_{\mathcal{M}}$ ist gültig genau dann, wenn $\mathcal{M}$, beginnend auf dem leeren Band, einen akzeptierenden Zustand erreicht.
Hinweise:

- Dies ist ein weiterer Beweis für die Unentscheidbarkeit des Gültigkeitsproblems. Gehen Sie analog zu dem Beweis in der Vorlesung mittels if-goto-Programmen vor.
- Verwenden Sie Prädikate wie $Q(i, j, q)$ ("zum Zeitpunkt i ist der Lesekopf über der Position j und im Zustand q") und $B(i, j, z)$ ("zum Zeitpunkt i trägt das Band an Position j das Zeichen z").

- Der Einfachheit halber kann man annehmen, dass die Zustände und das Bandalphabet Teilmengen der natürlichen Zahlen sind, dadurch kann man eine kanonische Interpretation mit den natürlichen Zahlen als Universum verwenden.

Aufgabe 2 **(Lösungsvorschlag)** *Unentscheidbarkeit*

Die Konstruktion von $F_{\mathcal{M}}$ verläuft analog zu dem Unentscheidbarkeitsbeweis aus der Vorlesung, wo eine entsprechende Formel für ein gegebenes if-goto-Programm konstruiert wurde. Der Aufbau von $F_{\mathcal{M}}$ ist wie folgt (Details siehe weiter unten):

$$F_{\mathcal{M}} = \Big(\psi_0 \wedge \kappa_0 \wedge \forall i \forall j \bigwedge_{q \in Q} \bigwedge_{a \in \Gamma} \tau_{q,a}\Big) \to \exists i \exists j \bigvee_{q \in F} Q(i,j,q)$$

Der linke Teil der Implikation besagt, wie sich eine Struktur verhalten muss, wenn sie die Funktionsweise der Turing-Maschine getreu simuliert. Die rechte Seite besagt, dass ein Endzustand erreichbar ist. Ist $F_{\mathcal{M}}$ gültig, so ist in jedem Modell, das eine Turing-Maschine darstellt, auch ein Endzustand erreichbar. Da es unentscheidbar ist, ob eine Turing-Maschine auf leerem Band anhält, muss auch die Gültigkeit von Formeln der Prädikatenlogik unentscheidbar sein.
Die Bestandteile der linken Formelhälfte sind wie folgt:

- ψ_0 ist den Vorlesungsfolien zum Thema "Unentscheidbarkeit" (Folie 16) entnommen und charakterisiert eine Ordnung K und eine Nachfolgerfunktion s, die wir für die anderen Bestandteile benötigen:

$$\begin{aligned} \psi_0 \quad = \quad & \forall x \forall y \big(K(x,y) \to \neg K(y,x)\big) \ \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z \big((K(x,y) \wedge K(y,z)) \to K(x,z)\big) \ \wedge \\ & \forall x \big(K(0,x) \vee x = 0\big) \ \wedge \\ & \forall x K(x, s(x)) \ \wedge \\ & \forall x \forall y \big(K(x,y) \to (K(s(x),y) \vee s(x) = y)\big) \end{aligned}$$

- κ_0 beschreibt die Anfangskonfiguration der Maschine:

$$\kappa_0 = Q(0,0,q_0) \wedge \forall j B(0,j,\perp)$$

- $\tau_{q,a}$ beschreibt das Verhalten der Maschine, wenn sie sich im Zustand q befindet und a unter dem Lesekopf liegt. Sei $\delta(q,a) = (q', a', R)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tau_{q,a} = \Big(Q(i,j,q) \wedge B(i,j,a)\Big) \quad \to \quad & \Big(Q(s(i), s(j), q') \wedge B(s(i), j, a') \ \wedge \\ & \forall k \big(\neg(k = j) \to \exists b (B(i,k,b) \wedge B(s(i),k,b))\big)\Big) \end{aligned}$$

  Ist $\delta(q,a) = (q', a', N)$, so ändert sich lediglich der erste Bestandteil der rechten Seite in der obigen Formel zu $Q(s(i), j, q)$, d.h., der Kopf wird *nicht* um eins weiter bewegt.

Ist $\delta(q,a) = (q', a', L)$, so müssen wir die Formel leicht abwandeln, sie lautet dann:

$$\tau_{q,a} = \Big(Q(i, s(j), q) \wedge B(i, s(j), a)\Big) \;\rightarrow\; \Big(Q(s(i), j, q') \wedge B(s(i), s(j), a') \;\wedge \\ \forall k\big(\neg(k = s(j)) \rightarrow \exists b(B(i, k, b) \wedge B(s(i), k, b))\big)\Big)$$

Der Korrektheitsbeweis erfolgt analog zu dem in der Vorlesung gebrachten Beweis mit if-goto-Programmen.