Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 21. Dezember, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Fundamentaler Satz der Prädikatenlogik

Betrachten Sie die prädikatenlogische Aussage

$$F = N(a) \land \forall x \exists y \big(K(x,y) \land \neg N(y)\big) \land \forall x \forall y \forall z \big((K(x,y) \land K(y,z)) \rightarrow K(x,z)\big).$$

(a) F ist erfüllbar. Geben Sie ein Modell von F an.

(b) Geben Sie die skolemisierte Form G von F an.

(c) Konstruieren Sie eine Herbrand-Struktur $\mathcal{B}$, die Modell von G ist.

Aufgabe 2 Syllogismen

Betrachten Sie folgenden Syllogismus; es ist derselbe wie in Aufgabenblatt 7, Aufgabe 1 (b.i):

Einige M sind nicht P, alle M sind S, dann gilt: einige S sind nicht P.

Stellen Sie zunächst die prädikatenlogische Formel F auf, die dem Syllogismus entspricht. Führen Sie dann folgende Schritte aus:

(a) Bilden Sie die Skolemform G von $\neg F$.

(b) Geben Sie das Herbrand-Universum $D(G)$ an.

(c) Geben Sie alle zu G passenden Herbrand-Strukturen an.

(d) Werten Sie G unter den in (c) angegebenen Strukturen aus. Ist G erfüllbar? Was folgt daraus für F?

Bitte wenden!

Aufgabe 3 Monadische Prädikatenlogik

Unter *monadischer Prädikatenlogik* versteht man die Einschränkung der Prädikatenlogik auf Formeln mit einstelligen Prädikaten und ohne Funktionssymbole. (Z.B. lassen sich alle Syllogismen als Formeln der monadischen Prädikatenlogik ausdrücken.) Im Folgenden nennen wir eine Formel der monadischen Prädikatenlogik eine monadische Formel.

(a) Zeigen Sie, dass jede monadische Formel F äquivalent ist zu einer monadischen Formel G ohne verschachtelte Quantoren.

Beispiel: $\forall x \exists y \big(P(x) \vee Q(y)\big)$ ist äquivalent zu $\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$.

(b) Geben Sie ein Verfahren zur Lösung des folgenden Entscheidungsproblems an: Gegeben eine monadische Formel F, ist F erfüllbar?

Hinweise: (a) ist schwieriger als (b). Wenn Sie (a) nicht schaffen, können Sie immer noch (b) lösen, indem Sie das Ergebnis aus (a) voraussetzen.

Gehen Sie bei (a) zunächst o.b.d.A. davon aus, dass F in bereinigter Pränexform steht, wobei F^* (die Matrix von F) in disjunktiver Normalform steht. Anschließend behandeln Sie einen Quantor nach dem anderen, beginnend mit dem innersten, und eliminieren ihn von allen Unterformeln, die die quantifizierte Variable nicht enthalten, wobei Sie die Fälle $\exists x F^*$ und $\forall x F^*$ unterschiedlich behandeln müssen.

Ein einfaches Beispiel, das die bei (a) möglichen Fälle veranschaulicht, ist die Formel $\forall x \exists y \big((P(x) \wedge Q(y)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(y))\big)$. Überlegen Sie sich, wie Ihre Umformung bei dieser Formel funktioniert.