Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 21. Dezember, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Fundamentaler Satz der Prädikatenlogik

Betrachten Sie die prädikatenlogische Aussage

$$F = N(a) \land \forall x \exists y \big(K(x,y) \land \neg N(y)\big) \land \forall x \forall y \forall z \big((K(x,y) \land K(y,z)) \to K(x,z)\big).$$

(a) F ist erfüllbar. Geben Sie ein Modell von F an.

(b) Geben Sie die skolemisierte Form G von F an.

(c) Konstruieren Sie eine Herbrand-Struktur $\mathcal{B}$, die Modell von G ist.

Aufgabe 1 (Lösungsvorschlag) *Fundamentaler Satz der Prädikatenlogik*

(a) Ein Beispiel sind die natürlichen Zahlen mit der Null und der Kleiner-als-Relation:

$$U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N} \cup \{0\},\ N^{\mathcal{A}} = \{0\},\ K^{\mathcal{A}} = \{\, (x,y) \mid x < y \,\},\ a^{\mathcal{A}} = 0$$

(b) $\forall x \forall y \forall z \Big(N(a) \land K(x, f(x)) \land \neg N(f(x)) \land \big((K(x,y) \land K(y,z)) \to K(x,z)\big)\Big)$

(c) $\mathcal{B}$ mit $U_{\mathcal{B}} = D(G) = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\} = \{\, f^i(a) \mid i \geq 0 \,\}$, $N^{\mathcal{B}} = \{a\}$, $K^{\mathcal{B}} = \{\, (f^i(a), f^j(a)) \mid i < j \,\}$, $a^{\mathcal{B}} = a$ und $f^{\mathcal{B}}(t) = f(t)$.

Aufgabe 2 Syllogismen

Betrachten Sie folgenden Syllogismus; es ist derselbe wie in Aufgabenblatt 7, Aufgabe 1 (b.i):

Einige M sind nicht P, alle M sind S, dann gilt: einige S sind nicht P.

Stellen Sie zunächst die prädikatenlogische Formel F auf, die dem Syllogismus entspricht. Führen Sie dann folgende Schritte aus:

(a) Bilden Sie die Skolemform G von $\neg F$.

(b) Geben Sie das Herbrand-Universum $D(G)$ an.

(c) Geben Sie alle zu G passenden Herbrand-Strukturen an.

(d) Werten Sie G unter den in (c) angegebenen Strukturen aus. Ist G erfüllbar? Was folgt daraus für F?

Aufgabe 2 **(Lösungsvorschlag)** *Syllogismen*

Die Formel F ist (wie in Blatt 7):

$$\Big(\exists x\big(M(x) \wedge \neg P(x)\big) \wedge \forall x\big(M(x) \rightarrow S(x)\big)\Big) \rightarrow \exists x\big(S(x) \wedge \neg P(x)\big)$$

(a)

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv \exists x\big(M(x) \wedge \neg P(x)\big) \wedge \forall x\big(M(x) \rightarrow S(x)\big) \wedge \neg\exists x\big(S(x) \wedge \neg P(x)\big)\\
&\equiv \exists x\big(M(x) \wedge \neg P(x)\big) \wedge \forall y\big(M(y) \rightarrow S(y)\big) \wedge \forall z\big(S(z) \rightarrow P(z)\big)\\
&\equiv \exists x\forall y\forall z\big((M(x) \wedge \neg P(x)) \wedge (M(y) \rightarrow S(y)) \wedge (S(z) \rightarrow P(z))\big)\\
&\equiv_e \forall y\forall z\big((M(a) \wedge \neg P(a)) \wedge (M(y) \rightarrow S(y)) \wedge (S(z) \rightarrow P(z))\big) =: G
\end{aligned}$$

(b) $D(G) = \{a\}$

(c) G hat drei Prädikate, und $D(G)$ nur ein Element a. Also gibt es acht passende Strukturen, die sich nur darin unterscheiden, welche Prädikate a erfüllt. Zwei Beispiele:

$$\mathcal{A}_1 \text{ mit } U_{\mathcal{A}_1} = D(G) = \{a\},\ \ M^{\mathcal{A}_1} = P^{\mathcal{A}_1} = \{a\},\ \ S^{\mathcal{A}_1} = \emptyset$$
$$\mathcal{A}_2 \text{ mit } U_{\mathcal{A}_2} = D(G) = \{a\},\ \ M^{\mathcal{A}_2} = P^{\mathcal{A}_2} = S^{\mathcal{A}_2} = \emptyset$$

(d) In der untenstehenden Tabelle werden die acht Strukturen ausgewertet. Die drei linken Spalten geben an, ob $M(a)$, $P(a)$ bzw. $S(a)$ gilt (1) bzw. nicht gilt (0), die rechte das Ergebnis der Auswertung:

$M(a)$	$P(a)$	$S(a)$	Erg.
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

G hat also kein Herbrand-Modell. Demnach ist G nicht erfüllbar. Da G erfüllbarkeitsäquivalent zu $\neg F$ ist, ist F gültig.

Aufgabe 3 Monadische Prädikatenlogik

Unter *monadischer Prädikatenlogik* versteht man die Einschränkung der Prädikatenlogik auf Formeln mit einstelligen Prädikaten und ohne Funktionssymbole. (Z.B. lassen sich alle Syllogismen als Formeln der monadischen Prädikatenlogik ausdrücken.) Im Folgenden nennen wir eine Formel der monadischen Prädikatenlogik eine monadische Formel.

(a) Zeigen Sie, dass jede monadische Formel F äquivalent ist zu einer monadischen Formel G ohne verschachtelte Quantoren.

Beispiel: $\forall x \exists y \big(P(x) \vee Q(y)\big)$ ist äquivalent zu $\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$.

(b) Geben Sie ein Verfahren zur Lösung des folgenden Entscheidungsproblems an: Gegeben eine monadische Formel F, ist F erfüllbar?

Hinweise: (a) ist schwieriger als (b). Wenn Sie (a) nicht schaffen, können Sie immer noch (b) lösen, indem Sie das Ergebnis aus (a) voraussetzen.

Gehen Sie bei (a) zunächst o.b.d.A. davon aus, dass F in bereinigter Pränexform steht, wobei F^* (die Matrix von F) in disjunktiver Normalform steht. Anschließend behandeln Sie einen Quantor nach dem anderen, beginnend mit dem innersten, und eliminieren ihn von allen Unterformeln, die die quantifizierte Variable nicht enthalten, wobei Sie die Fälle $\exists x F^*$ und $\forall x F^*$ unterschiedlich behandeln müssen.

Ein einfaches Beispiel, das die bei (a) möglichen Fälle veranschaulicht, ist die Formel $\forall x \exists y \big((P(x) \wedge Q(y)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(y))\big)$. Überlegen Sie sich, wie Ihre Umformung bei dieser Formel funktioniert.

Aufgabe 3 (Lösungsvorschlag) *Monadische Prädikatenlogik*

(a) Sei $F' = Q_n x_n \dots Q_1 x_1 F''$ eine zu F äquivalente Formel in bereinigter Präfix-Normalform, wobei F'' keine Quantoren enthält und in DNF ist.

Wir betrachten folgende Sequenz $G_0, \dots, G_n$ der Unterformeln von F': $G_0 := F''$, $G_i := Q_i x_i G_{i-1}$ für $i = 1, \dots, n$. Zu jeder Formel dieser Sequenz konstruieren wir eine Formel H_i, so dass $H_i \equiv G_i$ ist und folgende Eigenschaften hat:

(1) H_i ist eine Formel in DNF, d.h. hat die Form $C_1 \vee \dots \vee C_k$, wobei die Klauseln von der Form $C_i = C_i^1 \wedge \cdots C_i^{m_i}$ sind;

(2) jede Unterformel C_i^j, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m_i$, ist von einer der folgenden Formen:

- ein Literal, d.h. $P(x)$ oder $\neg P(x)$;
- $\exists x J$, wobei J eine Konjunktion von Literalen ist, alle mit x;
- $\forall x J$, wobei J eine Disjunktion von Literalen ist, alle mit x.

Wir setzen $H_0 := G_0$. Offensichtlich hat H_0 die o.g. Eigenschaften. Die Formeln H_i, $i = 1, \dots, n$ erhalten wir, indem wir $Q_i x_i H_{i-1}$ äquivalent umformen; offensichtlich gilt daher $H_i \equiv G_i$.

Die Umformung von $Q_i x_i H_{i-1}$ geschieht wie folgt:

- Wenn Q_i ein Existenzquantor ist, so gilt $\exists x_i (C_1 \vee \cdots \vee C_k) \equiv \exists x_i C_1 \vee \cdots \vee \exists x_i C_k$. O.b.d.A. hat jedes C_j die Form $\bigwedge_{m=1}^{\ell} C_j^m \wedge \bigwedge_{m=1}^{\ell'} C'^m_j$, wobei die C_j^m von x_i abhängige Literale sind und x_i in den C'^m_j nicht auftaucht. Dann ist jedes $\exists x_i C_j$ äquivalent zu $\left(\exists x_i \bigwedge_{m=1}^{\ell} C_j^m\right) \wedge \bigwedge_{m=1}^{\ell'} C'^m_j$. Die durch diese Äquivalenzen gewonnene Formel bezeichnen wir mit H_i.

- Wenn Q_i ein Allquantor ist, so bringen wir H_{i-1} zunächst durch Anwendung des Distributivgesetzes in KNF. Die entstehende Formel hat noch immer die o.g. Eigenschaft (2). Anschließend nutzen $\forall x_i(C_1 \wedge \cdots \wedge C_k) \equiv \forall x_i C_1 \wedge \cdots \wedge \forall x_i C_k$ aus. O.b.d.A. hat jetzt jedes C_j die Form $\bigvee_{m=1}^{\ell} C_j^m \vee \bigvee_{m=1}^{\ell'} C'^m_j$, wobei die C_j^m von x_i abhängige Literale sind und x_i in den C'^m_j nicht auftaucht. Dann ist jedes $\forall x_i C_j$ äquivalent zu $\left(\forall x_i \bigvee_{m=1}^{\ell} C_j^m\right) \vee \bigvee_{m=1}^{\ell'} C'^m_j$. Die durch diese Äquivalenzen gewonnene Formel bringen wir durch erneute Anwendung des Distributivgesetzes ("Ausmultiplizieren") wieder in DNF und bezeichnen Sie mit H_i.

Es gilt $H_i \equiv F$, wobei H_i keine verschachtelten Quantoren mehr enthält.

Beispiel: Sei $F = \forall x \exists y \big((P(x) \wedge Q(y)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(y))\big)$. Wir setzen

- $G_0 = H_0 = (P(x) \wedge Q(y)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(y))$;
- $G_1 \equiv H_1 \equiv \exists y H_0 \equiv (P(x) \wedge \exists y Q(y)) \vee (\neg P(x) \wedge \exists y \neg Q(y))$;
- $G_2 \equiv \forall x H_1 \equiv \forall x\big((P(x) \wedge \exists y Q(y)) \vee (\neg P(x) \wedge \exists y \neg Q(y))\big)$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \forall x\big((P(x) \vee \neg P(x)) \wedge (P(x) \vee \exists y \neg Q(y)) \wedge \\
&\qquad (\exists y Q(y) \vee \neg P(x)) \wedge (\exists y Q(y) \vee \exists y \neg Q(y))\big) \\
&\equiv \big((\forall x P(x) \vee \exists y \neg Q(y)) \wedge (\exists y Q(y) \vee \forall x \neg P(x))\big)
\end{aligned}
$$

(Die Rücktransformation in DNF wurde hier ausgespart.)

(b) Gegeben F konstruieren wir zunächst eine äquivalente monadische Formel G ohne verschachtelte Quantoren mit dem Verfahren aus (a) und bereinigen diese. Anschließend wandeln wir G in Pränexform um, indem wir zunächst die Existenzquantoren nach vorne ziehen und *anschließend* die Allquantoren. In der Pränexform steht also kein Existenzquantor unter einem Allquantor. Bilden wir die Skolemform H von G, entstehen nur zusätzliche Konstanten, aber keine Funktionssymbole. Daher ist $D(H)$ endlich. Demzufolge hat H nur endlich viele Herbrand-Strukturen. Wir probieren alle der Reihe nach aus, ob sie Modell von H sind. Wenn wir ein Modell finden, ist H und damit auch F erfüllbar. Wenn wir kein Modell finden, ist H und damit auch F unerfüllbar.